

Roter Faden Physik
Bewegung freier Ladungsträger in Feldern

1. Auflage

von

Dr. Ortwin Fromm

Evangelische Schule Frohnau, Berlin

I) Einführung

Frei bewegliche Elektronen in Metalldrähten sind Voraussetzung für die Stromwirtschaft. Durch permanente Stöße erreichen die Elektronen hier nur eine geringe Durchschnittsgeschwindigkeit. Im Vakuum oder in verdünntem Gasen hingegen lassen sich die Ladungsträger stark beschleunigen und können so in Leuchtstoffröhren, Glimmlampen, Rundfunk- und Fernschröhren, Massenspektroskopen und Großbeschleunigern entsprechend genutzt werden. Besonders wichtig ist das Elektron. Millikan konnte 1910 zeigen, dass die negative Ladung im Atom nicht etwa kontinuierlich verteilt ist, sondern dass sie aus einzelnen Ladungsportionen, den Elektronen, besteht. Ablenkungsversuche konnten das nämlich nicht entscheiden. Im Orbitalmodell erscheint das Elektron erneut „verschmiert“, doch das ist anders zu verstehen.

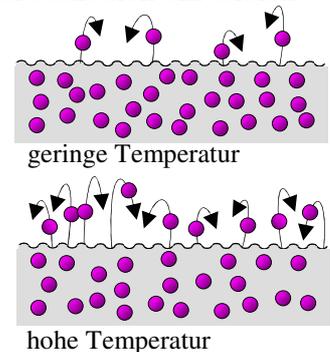
II) Erzeugung freier Ladungsträger

Die Elektronen im Atom, Molekül oder Festkörper sind elektrostatisch gebunden. Um sie freizusetzen, muss eine Ablösearbeit zugeführt werden. Dafür gibt es unterschiedliche Methoden.

1) Freisetzung von Elektronen

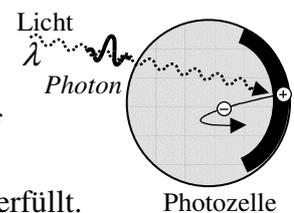
a) Glühemission

In einer stromdurchflossenen Glühwendel übertragen die Atomrümpfe durch Stöße eine mehr oder weniger große Geschwindigkeit auf die Elektronen, sodass diese eine statistische Geschwindigkeitsverteilung besitzen, bei welcher die schnellsten, wie bei der Verdunstung, „abdampfen“ können. Bei einer gegebenen Temperatur stellt sich ein Gleichgewicht ein: Im Mittel springen so viele Elektronen aus der Wendel, wie wieder in das Metall zurückfallen. Je höher die Temperatur, desto weiter verschiebt sich der Gleichgewichtspunkt nach oben. Glüht der Draht, so ist er von einer erheblichen Wolke freier Elektronen umgeben. Weil die Elektronenröhren alter Radios auf der Glühemission beruhen, nennt man sie auch abfällig „Dampfradios“.



b) Photoeffekt: Lichtbedingte Emission von Elektronen.

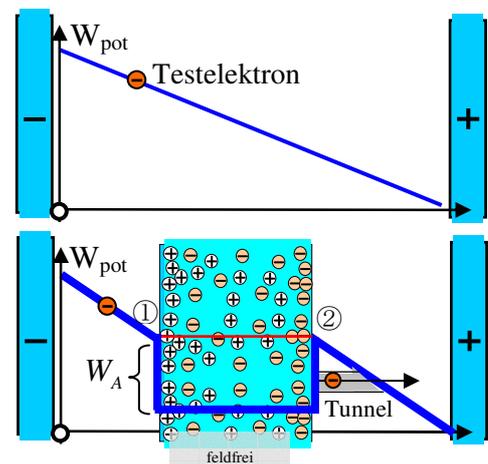
Hier wird eine Metallplatte mit Licht der Wellenlänge λ bestrahlt. Einstein erkannte, dass Licht aus einzelnen Lichtteilchen, den Photonen, besteht, die jeweils die Energie $W = h \cdot f$ tragen. ($h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$; $f = c / \lambda$). Nach dem Eins-zu-Eins-Prinzip können nicht zwei Photonen gleichzeitig ihre Energie auf ein Elektron übertragen. Somit setzt die Photoemission erst ein, wenn die Frequenz (Farbe) des Lichtes die Bedingung $h f > W_A$ erfüllt.



Besitzt das Licht die Mindestfrequenz, so steigt die Anzahl der freigesetzten Elektronen mit der Anzahl der im Lichtstrom enthaltenen Photonen, d.h. mit der Intensität, bzw. Helligkeit des Lichtes. Im Belichtungsmesser wird der Photoeffekt technisch genutzt.

c) Feldemission

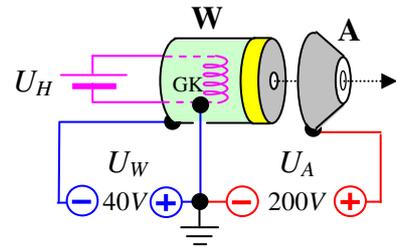
Zwischen den abgebildeten geladenen Platten ist der Verlauf der potentiellen Energie eines Testelektrons linear fallend. - Bringt man ein Metall ein, so bilden sich zwei Ladungshäute aus und das Metallinnere wird feldfrei. Dadurch bekommt die W_{pot} -Kurve bei ① und ② je einen Knick und würde zwischen diesen Punkten waagrecht weiterlaufen, wenn das Metall das Testelektron nicht mit der Ablösearbeit W_A in sich hinein ziehen würde. Auf der rechten Seite muss man W_A wieder aufwenden, um das Elektron dort frei zu



bekommen. Dadurch entsteht die eingezeichnete W_{pot} – Kurve. Bei großer äußerer Feldstärke ist die Potentialwand auf der rechten Seite so dünn, dass die Elektronen, wie Wasser durch einen aufgeweichten Deich, nach außen sickern können. So erklärt sich, warum ein starkes äußeres elektrisches Feld Elektronen aus dem Metall reißen kann. Das Unterlaufen einer schmalen Potentialbarriere heißt Tunneleffekt. Der Effekt ist quantentheoretischer Natur, er wird bei der Rastertunnelmikroskopie verwendet. Aus einer dünnen Metallspitze sprühen die Elektronen dort geradezu heraus.

d) Die Elektronenkanone

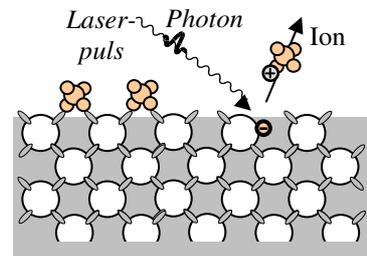
Für viele Anwendungszwecke benötigt man eine möglichst punktförmige Elektronenquelle, deren Austrittsrate steuerbar ist. Dies gelingt mit der „Elektronenkanone“: Eine Glühkathode befindet sich innerhalb des sog. Wehneltzylinders, der gegenüber der Kathodenwendel durch die Spannung U_W negativ geladen ist. Dadurch werden die emittierten Elektronen von den Zylinderwänden abgehalten. Nur ein kleines Loch ermöglicht den Austritt, dessen Intensität durch größere Werte von U_W auf null gesenkt werden kann. Vor dem Austrittsloch befindet sich die positiv geladene Anode. Sie beschleunigt die Elektronen. Diese folgen jedoch nicht genau den Feldlinien, welche vom Zylinderloch zum Anodenblech verlaufen, sondern die meisten schießen aufgrund ihrer Trägheit durch die Anodenbohrung, aus welcher dann ein in Anzahl und Geschwindigkeit steuerbarer Elektronenstrahl austritt.



Der Energiesatz $\frac{1}{2} m v^2 = e \cdot U_A$ liefert die Austrittsgeschwindigkeit $v = \sqrt{2 e \cdot U_A / m}$.

2) Freisetzung von Ionen.

Wir kennen die Schwärzung der Innenseite des Glaskolbens alter Glühlampen. Beim Glühen springen nicht nur Elektronen aus der Wendel, es lösen sich auch Atome und komplette Metallcluster ab. Im evakuierten Kolben füllt sich daher der Raum um die Glühwendel mit einem entsprechenden Gas. Einige Gasteilchen schlagen sich auf den verfügbaren Oberflächen nieder und werden dort chemisch gebunden.



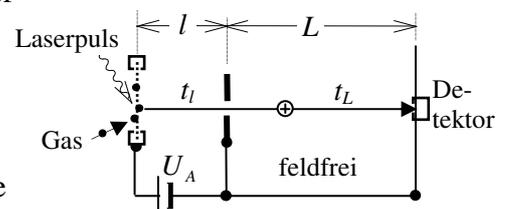
Den Vorgang nennt man *Adsorption*. Erhitzt man die Oberfläche, so werden die Teilchen wieder abgedampft (*Desorption*). Die Erhitzung lässt sich durch Laserimpulse exakt steuern. Viele der desorbierten Teilchen werden dabei ionisiert.

III) Bewegung freier Ladungsträger in einem homogenen elektrischen Feld

1) Beispiel: Flugzeit-Massenspektrometer

Die Massenspektroskopie trennt ionisierte Gasteilchen nach ihrer Masse und ermöglicht dadurch die Bestimmung der Atom- bzw. Molekülarten in dem Gasgemisch. Sie ersetzt somit eine chemische Analyse. Meist erfolgt die Trennung der Ionen durch deren unterschiedliches Bewegungsverhalten in einem elektro-magnetischen Überlagerungsfeld. Doch die Erzeugung starker Magnetfelder erfordert schwere Eisenkerne und große Ströme. Das kommt für den mobilen Einsatz (Raumsonden) nicht in Frage. Dort wird das Flugzeit-Massenspektrometer verwendet, welches nur ein elektrisches Feld benötigt und daher klein und leicht ist.

Das zu analysierende Gasgemisch wird zunächst auf einer Unterlage adsorbiert. Laserpulse setzen dann einzelne Atome bzw. Moleküle zu einem definierten Zeitpunkt wieder frei und ionisieren sie dabei. Die Ionen werden dann auf einer der Strecke l durch die Spannung U_A beschleunigt. Anschließend durchlaufen sie eine feldfreie Driftstrecke der Länge L . Je nach Masse m und Ladung q ergeben sich unterschiedliche Flugzeiten T vom Ablösezeitpunkt bis zur Detektierung.



Berechnung der Flugzeit, Rückschluss auf die spezifische Ladung der untersuchten Ionen:

Beschleunigungsstrecke l : Die anfangs ruhenden Teilchen werden auf der Strecke l konstant

mit $a = \frac{F}{m} = \frac{q \cdot E}{m} = \frac{q}{m} \cdot \frac{U_A}{l}$ beschleunigt. \Rightarrow Ortfunktion: $x(t) = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{q \cdot U_A}{m \cdot l} \cdot t^2$.

Für Strecke l wird t_l benötigt. Einsetzen $l = \frac{1}{2} \frac{q \cdot U_A}{m \cdot l} \cdot t_l^2$ und auflösen liefert $t_l = \sqrt{\frac{2m}{q \cdot U_A}} \cdot l$.

Endgeschwindigkeit beträgt dann: $v_l = a \cdot t_l = \frac{q \cdot U_A}{m} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{2m}{q \cdot U_A}} \cdot \lambda = \sqrt{\frac{q^2 U_A^2 \cdot 2m}{m^2 \cdot q U_A}} = \sqrt{\frac{2q U_A}{m}}$.

Driftstrecke L : Nun geht es *unbeschleunigt* mit $v = v_l$ weiter.

Aus $v_l = L/t_L$ folgt die Flugzeit $t_L = L \cdot \frac{1}{v_l} = L \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2q U_A}{m}}} = L \cdot \sqrt{\frac{m}{2q U_A}} = \frac{L}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot m}{q \cdot U_A}}$.

Gesamte Flugzeit: $T = t_l + t_L = \sqrt{\frac{2m}{q \cdot U_A}} \cdot l + \frac{L}{2} \cdot \sqrt{\frac{2m}{q \cdot U_A}}$ bzw. $T = \left(l + \frac{L}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{2m}{q \cdot U_A}}$.

Ergebnis: T wird gemessen, l , L und U_A sind bekannt.

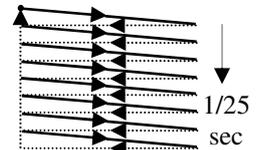
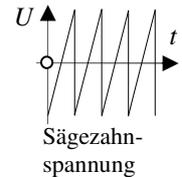
Somit folgt die spezifische Ladung des detektierten Teilchens

$$\frac{q}{m} = \frac{(2l + L)^2}{2T^2 \cdot U_A}$$

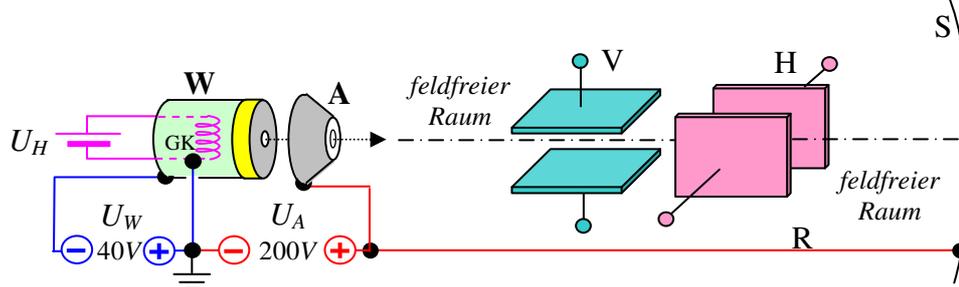
2) Beispiel: Braunsche Röhre mit elektrostatischer Ablenkung.

Die Braunsche Röhre nutzt man in der Messtechnik zur Analyse von Wechselspannungen bis in den GHZ -Bereich. Legt man Spannungen an die Vertikal- und Horizontalablenkplatten, so lässt sich der durch die Wehneltspannung intensitätsgeregelte Elektronenstrahl aus der Kanone auf jeden beliebigen Punkt ($y|z$) des Schirmes lenken, wo dann per Lumineszenz Licht abgestrahlt

wird. An **V** liegt das Signal und an **H** wird eine sog. Sägezahnspannung zur zeitlichen Auflösung gelegt. Alle Bauteile befinden sich in einem evakuierten Glaskolben. Der Bildschirm wird mit einer Rückleitung auf Anodenpotential gelegt, sodass zwischen Anode und Schirm ein bzgl. der x -Richtung feldfreier Raum (Faradayscher Käfig) entsteht, in welchem die Elektronen konstant driften. Anfangs war die Braunsche Röhre auch als Fernschröhre im Einsatz, wo jedoch meist magnetisch abgelenkt wurde (s.u.).



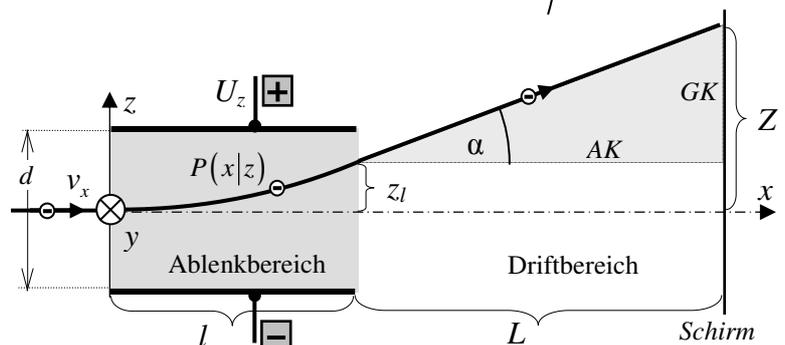
Der intensitätsgeregelte Elektronenstrahl überstreicht den Fernseh Bildschirm



Berechnung der Elektronenbahn

Die x -Komponente der Geschwindigkeit ist durch die Anodenspannung U_A der Elektronenkanone gegeben:

$v_{x,0} = \sqrt{2e \cdot U_A / m}$. Da nach Austritt aus der Kanone *keine* weitere Beschleunigung in x -Richtung



erfolgt, bleibt die Geschwindigkeit v_x während des gesamten weiteren Fluges konstant $v_{x,0}$.

a) Berechnung von Geschwindigkeit und Ort des Elektrons im Ablenkbereich.

(1) Anfangsbedingungen.: Z.Z. $t = 0$ trete das Elektron bei $x = 0$; $z = 0$ mit $v_z(0) = 0$ ein.

(2) x-Komponente: Im Abl.-Bereich gilt $a_x = \ddot{x} = 0$. Daraus folgt $v_x = \dot{x} = \text{const.}$, v_x behält also seinen Wert $v_x(t) = v_{x,0}$. Integrieren davon ergibt dann $x(t) = v_{x,0} \cdot t = \sqrt{2e \cdot U_A / m} \cdot t$.

(3) z-Komponente: Im Abl.-Bereich greift die Kraft $F_z = e \cdot E_z = e \cdot U_z / d$ in z-Richtung an. Das führt gemäß Newton II zu $\ddot{z} = eU_z / md$. Da $v_z(0) = 0$ sein soll, ergibt die Integration $v_z(t) = \dot{z}(t) = \frac{eU_z}{md} t$. Weiteres Integrieren liefert $z(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{eU_z}{md} \cdot t^2$, weil ja $z(0) = 0$ sein soll.

(4) Bestimmung der Ortskurve im Ablenkbereich durch Elimination der Zeit t.

Auflösen von $x(t)$ und $z(t)$ nach t^2 ergibt $t^2 = x^2 / v_{x,0}^2 = \frac{m \cdot x^2}{2e \cdot U_A}$ und $t^2 = \frac{2md \cdot z}{eU_z}$.

Gleichsetzen und Umstellen nach z liefert die parabelförmige Bahn $z(x) = \frac{U_z}{4d \cdot U_A} \cdot x^2$.

Die Bahnkurve ist unabhängig von der Ladung e und der Masse m , so dass eine „geladene Kartoffel“ dieselbe Bahn wie ein Elektron durchfliegt. Der Unterschied liegt nur im Tempo.

b) Austrittspunkt, Austrittswinkel

Der Austrittspunkt dem Ablenkbereich liegt bei $x = l$. Einsetzen ergibt $z_l = \frac{U_z \cdot l^2}{4d \cdot U_A}$.

Den Austrittswinkel erhält man durch die Steigung der Bahnkurve an der Stelle $x = l$.

Ableiten ergibt $z'(x) = \frac{1}{2d} \cdot \frac{U_z}{U_A} \cdot x$. Einsetzen von $x = l$ liefert $\tan \alpha = \frac{l}{2d} \cdot \frac{U_z}{U_A}$.

c) Auftreffstelle auf dem Bildschirm.

Für die Auftreffstelle Z im Driftbereich gilt $\tan \alpha = (Z - z_l) / L$. Einsetzen von z_l :

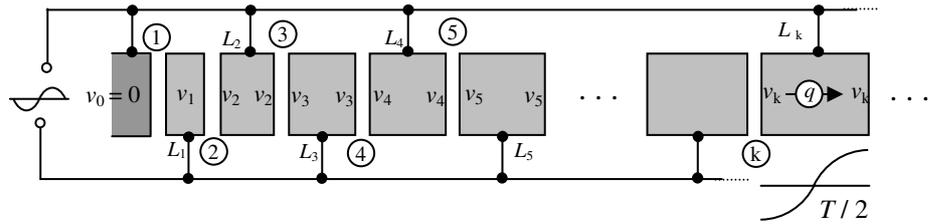
$Z = L \cdot \tan \alpha + z_l = L \cdot \frac{l}{2d} \cdot \frac{U_z}{U_A} + \frac{U_z \cdot l^2}{4d \cdot U_A}$. Zusammenfassen: $Z = \frac{l \cdot (2L + l)}{4d} \cdot \frac{U_z}{U_A}$.

Wegen $Z \sim U_z$ kann das Oszilloskop als schnell reagierendes Voltmeter verwendet werden.

3) Beispiel: Linearbeschleuniger

Im *Linearbeschleuniger* werden geladene Teilchen durch eine Hochspannung beschleunigt. Führungsmagnete entfallen. Einsatzgebiete sind Grundlagenforschung, Werkstoffprüfung und medizinische Radiologie. Dem Wert der Hochspannung ist jedoch eine Grenze gesetzt, denn zu große Feldstärken bewirken per Feldemission Koronaentladung am Material. Moderne Linearbeschleuniger bestehen deshalb aus mehreren Beschleunigersegmenten, die jeweils mit einer unterkritischen Hochspannung \hat{U} arbeiten. Im Segment L_0 werden die Ladungsträger erzeugt und dann zum Segment L_1 hin beschleunigt. Jedes Segment ist als Metallrohr ausgebildet. Innerhalb des Rohres driften die Teilchen wie in einem Faradayschen Käfig mit der erreichten Geschwindigkeit unbeschleunigt weiter. Während des Durchflugs wird die Spannung jedoch, von den Teilchen „unbemerkt“, umgepolt. Nach Erreichen des Rohrendes sind sie so erneut der Beschleunigungsspannung \hat{U} ausgesetzt sind. Da die Umpolungsfrequenz aus technischen Gründen konstant sein muss, müssen die Driftrohre immer länger werden.

Nur so befindet sich das Teilchen mit der jeweils höheren Geschwindigkeit zum richtigen Zeitpunkt am Startpunkt des nächsten Beschleunigungsschlitzes.



a) Bewegungsenergie nach dem k -ten Driftrohr: Wenn das Teilchen in den Schlitz eintritt, liegt am hinteren Segment die Spannung $-\hat{U}$ und am vorderen $+\hat{U}$. Die Zunahme der kinetischen Energie pro Schlitz beträgt daher $\Delta W_{kin} = q \cdot (2\hat{U})$, sodass die Teilchenenergie nach Durchlaufen des k -ten Schlitzes \textcircled{k} $W_k = \frac{1}{2} m v_k^2 = k \cdot 2 \cdot q \hat{U}$ beträgt.

b) Länge des dem k -ten Driftrohres: Die Geschwindigkeit nach dem k -ten Schlitz beträgt somit $v_k = \sqrt{2W_k / m} = 2 \cdot \sqrt{k \cdot q \hat{U} / m}$. Die Länge L_k des k -ten Segmentes muss nun so gewählt werden, dass die Flugzeit durch dieses Segment mit der *halben* Periodendauer $T/2$ der angelegten Wechselspannung übereinstimmt: $L_k = v_k \cdot \frac{T}{2} = \frac{v_k}{2} \cdot \frac{1}{f} = \frac{1}{f} \cdot \sqrt{k \cdot \hat{U} \cdot \frac{q}{m}}$.

Die Segmentlänge ist also bestimmt durch die Betriebsdaten \hat{U} und f , die spezifische Ladung q/m der zu beschleunigenden Teilchensorte und durch die Nr. k des Segmentes.

c) Nutzung für eine andere Teilchensorte: Eine Anlage mit festen Rohrlängen L_k sei zunächst für eine Teilchensorte mit q_1 / m_1 ausgelegt. Sie kann aber auch für eine andere Teilchensorte mit q_2 / m_2 genutzt werden, wenn Scheitelspannung \hat{U} und Frequenz f geeignet angepasst werden. Aus $\frac{1}{f_2} \cdot \sqrt{\frac{k \cdot q_2 \hat{U}_2}{m_2}} = L_k = \frac{1}{f_1} \cdot \sqrt{\frac{k \cdot q_1 \hat{U}_1}{m_1}}$ folgt die *Bedingung* $\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{f_2^2}{f_1^2} \cdot \frac{q_1}{m_1} \cdot \frac{m_2}{q_2}$.

d) Vorgabe einer gewünschten Geschwindigkeit für Teilchensorte (2)

Die Austrittsgeschwindigkeiten von Sorte (1) bzw. (2) aus dem k -ten Segment lauten $v_{k,1} = 2 \cdot \sqrt{k \cdot q_1 \hat{U}_1 / m_1}$ bzw. $v_{k,2} = 2 \cdot \sqrt{k \cdot q_2 \hat{U}_2 / m_2}$. Das Verhältnis hängt *nicht*

von der Nr. des Rohres ab: $\frac{v_{k,2}}{v_{k,1}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{k \cdot q_2 \hat{U}_2}{m_2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k \cdot q_1 \hat{U}_1}} = \sqrt{\frac{q_2 m_1}{q_1 m_2} \cdot \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}}$.

Einsetzen der Bedingung für feste Rohrlängen ergibt $\frac{v_{k,2}}{v_{k,1}} = \sqrt{\frac{q_2 m_1}{q_1 m_2} \cdot \frac{f_2^2}{f_1^2} \cdot \frac{q_1}{m_1} \cdot \frac{m_2}{q_2}} = \frac{f_2}{f_1}$.

Sorte (1) hatte nach dem k -ten Rohr die Geschwindigkeit $v_{k,1}$. Nun wird gefordert, dass Sorte (2) dort die Geschwindigkeit $v_{k,2}$ besitzt. Dafür muss ...

1) die Frequenz auf den Wert $f_2 = \frac{v_{k,2}}{v_{k,1}} \cdot f_1$ eingestellt werden und

2) die Scheitelspannung gemäß $\hat{U}_2 = \frac{v_{k,2}^2}{v_{k,1}^2} \cdot \frac{q_1}{m_1} \cdot \frac{m_2}{q_2} \cdot \hat{U}_1$ angepasst werden.

3) Will man die erste Teilchensorte z.B. mit doppelter Geschwindigkeit aus dem Beschleuniger heraus bekommen, so muss einerseits die Frequenz verdoppelt und andererseits die Spannung vervierfacht werden.

IV) Bewegung freier Ladungsträger in einem homogenen Magnetfeld

1) Beispiel: Fadenstrahlrohr

Im Fadenstrahlrohr werden Elektronen aus der Elektronenkanone in einen evakuierten Glaskolben geschossen. Zur Sichtbarmachung der Bahn wurde hochverdünntes Wasserstoffgas eingeleitet. Im homogenen Magnetfeld eines Helmholtz-Spulenpaares sieht man eine Kreisbahn, aus deren Radius sich die *spezifische* Ladung e/m der Elektronen ergibt:

Da die *Kreisform* auf dem Gleichgewicht von Lorentzkraft (e) und Trägheit (m) beruht, liefert der Versuch *nur* das *Verhältnis* e/m . Aus der Kanone könnte daher auch eine „verschmierte elektronische Substanz“ mit festem Coulombwert pro kg austreten.

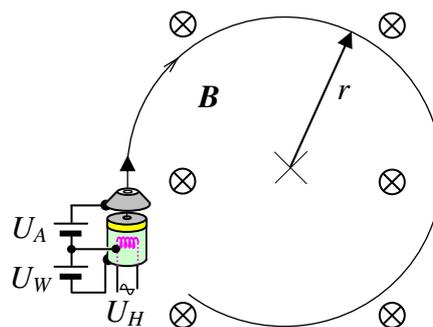
a) Bahnberechnung

Die Elektronenkanone liefert Elektronen der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2eU_A/m}$. Im homogenen Magnetfeld der Flussdichte B erfahren die Elektronen die Lorentzkraft $F_L = evB$, welche sie auf eine Kreisbahn zwingt. Auf dieser Bahn heben sich Zentrifugalkraft $F_z = mv^2/r$ und Lorentzkraft auf:

Aus $evB = \frac{mv^2}{r}$ ergibt sich der Radius $r = \frac{vm}{Be}$.

Quadrieren, Einsetzen von $v^2 = \frac{2eU_A}{m}$ und Umstellen ergibt die *spezifische Ladung*

$\frac{e}{m} = \frac{2U_A}{B^2 r^2}$ des Elektrons. Das Experiment liefert den Wert $\frac{e}{m} = 1,76 \cdot 10^{11} C$.



b) Kinetische Energie: Da die Lorentzkraft stets *rechtwinklig* zur Bewegungsrichtung orientiert ist, leistet sie *keine* Arbeit. Kinetische Energie und Geschwindigkeitsbetrag bleiben daher auf der Kreisbahn konstant: $\Delta E_{kin} = \Delta W = F_L \cdot \Delta s \cdot \cos 90^\circ = 0$.

c) Umlauffrequenz: Aus $v = \frac{U}{T} = 2\pi \cdot r \cdot f$ folgt die Umlauffrequenz $f_0 = \frac{v}{2\pi \cdot r} = \frac{Be}{2\pi m}$.

Die *Radialbeschleunigung* der Elektronen führt zur Abstrahlung von EM-Wellen der Frequenzen $n \cdot f_0$, wodurch die umlaufenden Elektronen etwas Energie verlieren.

2) Beispiel: Magnetische Ablenkung in der Braunschen Röhre (Fernsehröhre)

Bei Fernsehrohren ist magnetische Ablenkung gebräuchlich, weil die Spulen von *außen* angesetzt werden können. Die Elektronen treten wieder mit $v_e = \sqrt{2e \cdot U_A / m}$ in den Ablenkbereich der Länge l ein, in welchem sie

einen Kreisbogen mit Radius $r = \frac{v_e m}{Be}$

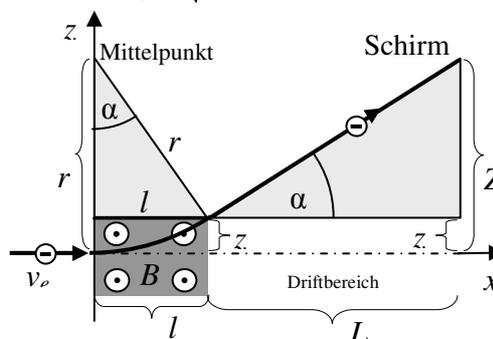
durchlaufen. Im kräftefreien Driftbereich geht es dann gerade zum Schirm. Aus den beiden rechtwinkligen Dreiecke der Abb.

folgt $\frac{Z-z}{L} = \frac{l}{r-z}$. Im Allg. gilt $Z \gg z$,

aber $r \gg z$. Daher $\Rightarrow (Z-z) \cdot r \approx L \cdot l$.

Pythagoras: $r^2 = l^2 + (r-z)^2 = l^2 + r^2 - 2rz + z^2 \approx l^2 + r^2 - 2rz \Rightarrow 0 \approx l^2 - 2rz \Rightarrow z \approx l^2 / 2r$.

Einsetzen liefert $Z \approx \frac{l \cdot (L+l/2)}{r} = \frac{Be}{v_e m} \cdot l \cdot (L+l/2)$. In dieser Näherung gilt also $\underline{Z \sim B}$.



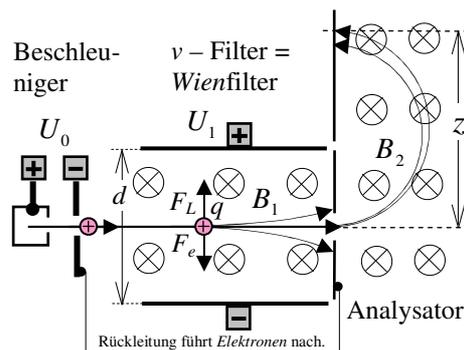
V) Freie Ladungsträger in homogenem elektrischem *und* magnetischem Feld.

Beispiel: Klassische Massenspektroskopie

Ein Massenspektroskop trennt Ionen nach ihrer Masse und ersetzt dadurch eine chemische Analyse.

Die klassische Massenspektroskopie arbeitet mit der *Überlagerung* eines elektrischen und magnetischen Feldes. Zunächst werden die Ionen in einer Kammer durch Abdampfen, Laserpulse oder ähnliches abgelöst. Sie gelangen dann mit einer unbekanntem Anfangsgeschwindigkeit in die *Beschleunigungstrecke* der Spannung U_0 , welche sie mit einer entsprechend unbekanntem Geschwindigkeit verlassen, um dann in ein gekreuztes E -, B -Feld einzutreten. Dieses dient als *Geschwindigkeitsfilter*: Bei geeigneter Orientierung wirken die Lorentzkraft und die elektrostatische Kraft gegeneinander. Ein Teilchen fliegt *genau dann* geradeaus, wenn $vqB_1 = qE_1$ gilt. Damit filtert die Anordnung genau diejenigen Partikel heraus, welche die Geschwindigkeit $v = E_1 / B_1$ besitzen. Alle anderen Teilchen werden gegen die Blendenbleche geleitet. Mit dieser fest bestimmten Geschwindigkeit treten die Teilchen nun in den *Analysator* ein. Er besteht aus einem Magnetfeld der Flussdichte B_2 und einer Photoplatte.

Dort durchlaufen die Teilchen einen Halbkreisbogen. Aus $r = \frac{vm}{B_2 q}$ (s. Fadenstrahlrohr) folgt die Auftreffstelle $z = 2r = 2 \cdot \frac{mv}{qB_2} = \frac{m}{q} \cdot \frac{2E_1}{B_1 \cdot B_2}$. Für zwei Ionen gleicher Ladung aber unterschiedlicher Masse ist das Verhältnis der Auftreffstellen z_2 und z_1 dann gegeben durch $\frac{z_2}{z_1} = \frac{m_2}{m_1}$. Auf diese Art lassen sich z.B. gleich ionisierte Isotope trennen.

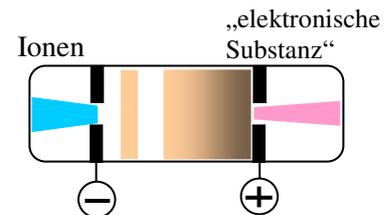


VI) Der Millikan-Versuch zur Entdeckung des Elektrons und zur Bestimmung von e .

1) Historischer Vorlauf: Schritte zur Entdeckung des Elektrons.

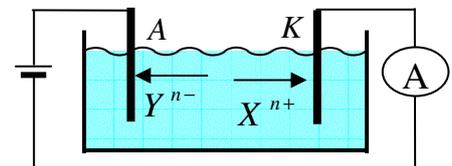
a) Glimmentladung: Entdeckung der „elektronischen Substanz“.

Bei der Glimmentladung eines stark verdünnten Gases zeigen sich rechts und links der Anoden- bzw. Kathodenbohrung elektrisch und magnetisch ablenkbare Strahlen. Für verschiedene Alkalimetalle lieferte die m/q -Bestimmung hinter dem Minuspol per Kreisradiusmessung im homogenen Magnetfeld die bekannten Atommassenverhältnisse von Li, Na, K, ... Daher mussten die Atome gleichermaßen positiv ionisiert sein. Die fehlende negative Ladung trat demnach hinter dem Pluspol aus. Im Magnetfeld ergab sich *eine* markante Kreisbahn, aus deren Radius zu schließen war, dass dieser „Kanalstrahl“ aus derselben „elektronischen Substanz“ besteht, wie der „Stoff“, welcher aus der Glühwendel austritt. Diese negative „elektronische Substanz“ trug pro kg Masse die elektrische Ladung $1,76 \cdot 10^{11} C$. Ob die Substanz jedoch (wie später im Orbitalmodell angenommen) „verschmiert“ oder in Elektronen „portioniert“ ist, konnte dieser Versuch *nicht* klären.



b) Faradayexperiment: Elektrochemische Bestimmung der Ionen-Ladung q (Elektrolyse)

Bei der Elektrolyse erfolgt der Stromdurchfluss mittels eines chemischen Zersetzungsprozesses. An Anode und Kathode scheiden sich Stoffmengen ab. Da die Anzahl der abgeschiedenen *Mole* zur durchgeflossenen Ladung $Q = I \cdot t$ proportional ist, kann man ermitteln, wieviel



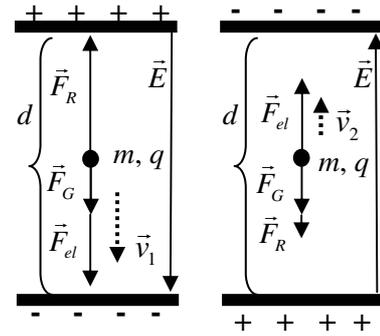
Ladung ein Ion trägt. *Beispiel:* Während einer Zeitspanne von $t = 2 h$ fließt ein konstanter Strom der Stärke $I = 3 A$. Dabei werden $25 g$ Silber abgeschieden.

Auswertung: Die relative Atommasse von Silber beträgt $M = 107,87 g/mol$. Also wurden $(25/107,87) mol \cdot N_A = 0,232 mol \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{ Silberteilchen/mol} = 1,395 \cdot 10^{23}$ Silberteilchen abgeschieden. Diese trugen insgesamt die Ladung $Q = 3 \cdot 2 \cdot 3600 C = 21600 C$, so dass auf ein Teilchen *durchschnittlich* $\bar{q} = 21600 C / 1,395 \cdot 10^{23} \approx 1,55 \cdot 10^{-19} C$ entfällt. Vergleich mit anderen Ionen zeigt, dass die *durchschnittlichen* Ladungen stets *Vielfache* von $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} C$ sind. Das Versuchsergebnis sagt jedoch nicht aus, dass *jedes* Silberion *einzel*n den Ladungswert $1,6 \cdot 10^{-19} C$ trägt. Es könnte sich um einen *Mittelwert* handeln. Die Portionierung der Ladungssubstanz in einzelne e -Pakete ist noch nicht zwingend. Erst Andrew Millikan gelang es 1910, *einzelne* Elektronen „sichtbar“ zu machen und nachzuweisen, dass die „elektrische Substanz“ ausschließlich in ganzzahligen Portionen von $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$ auftritt. Damit war das *Elektron* als Elementarteilchen dingfest gemacht.

2) Konzept des Millikan-Versuches.

a) *Konzept:* Um Elektronen zu handhaben, müssen diese an ein „Vehikel“ geheftet werden. Millikan verwendete extrem kleine Tröpfchen aus schwerflüchtigem Öl. Nur bei diesen konnte er hoffen, die erwartete Portionierung der „elektronischen Substanz“ in einzelne „Elektronen“ nachweisen zu können. Bei der Tröpfchenherstellung im Zerstäuber laden sich diese durch Abrieb an der Düse und untereinander minimal auf. Würde diese Ladung aus tausenden von Ladungsportionen bestehen, so würde der Portionierungsnachweis misslingen, deshalb die winzige Tröpfchengröße. Im Schwerfeld der Erde sinken die Tröpfchen nach unten, doch erfahren sie in der Luft eine Reibungskraft F_R , welche bei kugelförmiger Gestalt und laminarer Luftumströmung gemäß dem Stoke'sche Reibungsgesetz $F_R = 6\pi\eta r v$ proportional zur Sinkgeschwindigkeit v und zum Tröpfchenradius r ist. Die Zähigkeit der Luft war aus anderen Experimenten zu $\eta = 1,81 \cdot 10^{-5} kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$ bekannt.

Das Tröpfchen wird nun zwischen zwei Kondensatorplatten gebracht und dort mit dem Mikroskop beobachtet. - Die Beobachtungsproblematik wird unten beschrieben. - Nun wird eine Spannung U angelegt, deren Wert groß genug ist, um das Tröpfchen bei Umpolung einmal steigen und einmal (noch schneller) sinken zu lassen. Nach einer extrem kurzen Zeitspanne bewegt sich das Tröpfchen mit *konstanter* Geschwindigkeit und ist deshalb *kräftefrei*.



Mit $F_{el} = q \cdot E = q \cdot U / d$, $F_G = m \cdot g$ und $F_{R1,2} = 6\pi\eta r v_{1,2}$ ergeben sich die beiden Betragsgleichungen $q \cdot U / d + mg = 6\pi\eta r v_1$ und $q \cdot U / d - mg = 6\pi\eta r v_2$, woraus $v_1 = \frac{q \cdot U / d + mg}{6\pi\eta r}$ und $v_2 = \frac{q \cdot U / d - mg}{6\pi\eta r}$ folgt.

Addition bzw. Subtraktion der Gleichungen liefert $v_1 + v_2 = \frac{q \cdot U}{3\pi\eta r \cdot d}$ und $v_1 - v_2 = \frac{mg}{3\pi\eta r}$.

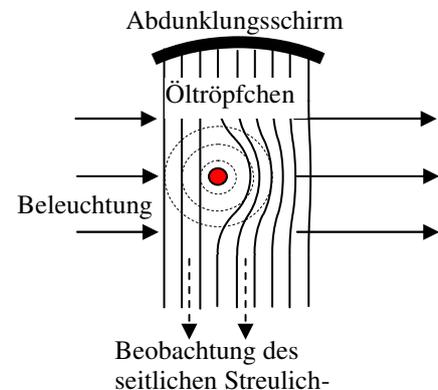
Die erste Gl. nach q umstellen: $q = \frac{3\pi\eta d (v_1 + v_2) \cdot r}{U}$. In der zweiten $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho$

beachten und nach r umstellen: $v_1 - v_2 = \frac{4\pi r^3 \cdot \rho \cdot g}{9\pi\eta r} \Rightarrow r^2 = \frac{9\eta \cdot (v_1 - v_2)}{4 \cdot \rho \cdot g}$.

Einsetzen: $q^2 = \frac{9\pi^2 \eta^2 d^2 (v_1 + v_2)^2}{U^2} \cdot \frac{9\eta \cdot (v_1 - v_2)}{4 \cdot \rho \cdot g} \Rightarrow q = \frac{9\pi d \cdot (v_1 + v_2)}{2U} \cdot \sqrt{\frac{\eta^3 \cdot (v_1 - v_2)}{\rho \cdot g}}$.

Die Tröpfchenladung gewinnt man also aus den Geschwindigkeitsdaten. Tröpfchenmasse und Tröpfchendurchmesser wurden eliminiert.

b) *Messung der Tröpfchenposition*: Die Ladung geeigneter Tröpfchen darf nur aus *wenigen* Elektronen bestehen. Dafür muss der Tröpfchendurchmesser kleiner als die Wellenlänge λ des sichtbaren Lichtes sein. Dann ist eine *Abbildung* per Lichtmikroskop aber nicht mehr möglich. Verwendung von kürzerwelligem Licht führt zu Ionisation und fällt daher aus. Da aber die Masse und damit auch der Durchmesser eliminiert sind, braucht man die Tröpfchen garnicht abzubilden. Es reicht, den Tröpfchenort durch seitliches Streulicht zu empfangen. Mittels dieser sog. *Dunkelfeldmethode* lässt sich der Ort auch dann ermitteln, wenn $2r$ kleiner als λ ist.



3) Auswertung eines Versuchsergebnisses

Dichte des Öls : $\rho = 874 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Zähigkeit der Luft: $\eta = 1,81 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

Abstand der Kondensatorplatten: $d = 8 \text{ mm}$. Länge der Messstrecke: $\Delta s = 1 \text{ mm}$.

Betriebsspannung $U = \pm 200 \text{ V}$. Messreihe:

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
Δt_1	9,74 s	19,5 s	10,2 s	13,6 s	8,75 s	13,24 s	15,14 s	7,7 s
Δt_2	11,2 s	27,0 s	25,6 s	24,2 s	26,0 s	43,6 s	17,6 s	8,9 s
q/e	2,06	0,98	3,1	1,92	3,9	2,1	1,1	2,98

Ergebnis: Die Tröpfchen tragen ganzzahlige Vielfache der Elementarladung e . Bruchteile der Elementarladung wurden nicht ermittelt: Die „elektronische Substanz“ ist portioniert.

- 10) Lithium kommt im Mineral Spodumen $\text{LiAlSi}_2\text{O}_6$ in den beiden *stabilen* Isotopen ${}^6_3\text{Li}$ und ${}^7_3\text{Li}$ vor. Aluminium liegt i.W. als ${}^{27}_{13}\text{Al}$, Silizium zu 99,8% als ${}^{28}_{14}\text{Si}$ und Sauerstoff stabil nur als ${}^{16}_8\text{O}$ vor. a) Beschreibe und erkläre den Aufbau des Massenspektroskops b) Die einfach ionisierten Moleküle treten mit $v_0 = 0\text{ms}^{-1}$ bis 10000ms^{-1} aus der Quelle und werden mit $U_A = 150\text{V}$ beschleunigt. Mit welchem v treten sie in den v -Filter ein? c) Im Filter gilt $E = 8\text{kV/m}$ und überall $B = 0,5\text{T}$. Welches v bzw. v_0 wird ausgefiltert? Wo treffen die $\text{LiAlSi}_2\text{O}_6^{2-}$ -Ionen auf?

VIII) Lösungen

- 1) $q = e$. Folgt $\frac{m}{m_p} = \frac{T^2}{(l + L/2)^2} \cdot \frac{eU_A}{2m_p} \approx 7$ bzw. 8. Daraus folgt ${}^6\text{Li}^1\text{H}^+$ und ${}^7\text{Li}^1\text{H}^+$ bzw. ${}^6\text{Li}^2\text{D}^+$.
- 2) b) $z = \frac{U_z \cdot l^2}{4d \cdot U_A} = 1,3\text{cm}$ c) $v_x = \sqrt{2eU_A/m_e} \approx 8,39 \cdot 10^6\text{m/s}$. Durchflugzeit $\tau = l/v_x \approx 23,8\text{ns}$.
 $v_z = \frac{eU_z \cdot \tau}{m_e d} \approx 1,12 \cdot 10^6\text{m/s}$. $v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2(\tau)} \approx 8,46 \cdot 10^6\text{m/s}$ d) Die Laufzeit ist allein durch v_x bestimmt, also $\tau_L = L/v_x \approx 35,8\text{ns}$. e) $Z = \frac{l \cdot (2L + l)}{4d} \cdot \frac{U_z}{U_A} = 5,3\text{cm}$ f) nicht.
- 3) b) $L_2 = \sqrt{2} \cdot L_1 \approx 56,6\text{cm}$. $L_{10} = \sqrt{10} \cdot L_1 \approx 1,265\text{m}$ c) Das α -Teilchen tritt mit $v_1 = \sqrt{2e\hat{U}/4 \cdot m_p} \approx 1,548\text{m/s}$ in die erste Driftröhre ein und braucht deshalb zum Durchlauf $\tau = L_1/v_1 \approx 258\text{ns}$. $T = 2 \cdot \tau \Rightarrow f = 1,935\text{MHz}$. d) 1,6% f) $U_{\text{neu}} = 25\text{kV}$.
- 4) a) $B = \mu_0 n I_{\text{err}}/l \approx 0,838\text{mT}$ c) $v = \sqrt{2eU_A/m_e} \approx 1,03 \cdot 10^7\text{m/s} \Rightarrow e/m_e = v/Br \approx 1,75 \cdot 10^{11}\text{C/kg}$; $T = 2\pi r/v \approx 42,8\text{ns}$ d) Die Bahn verlief zuvor im Kolben, jetzt stößt sie an die Wand.
- 5) Die austretenden Elektronen laufen jetzt \parallel zu B . $\Rightarrow F_L = 0$, also Geradeauslauf.
- 6) $v_x = v_0 \cos \alpha = 7 \cdot 10^7\text{m/s}$; $v_z = v_0 \sin \alpha = 1,2 \cdot 10^8\text{m/s}$. Die z -Komponente trägt nichts zur Laufzeit bei. $\Rightarrow \tau = L/v_x = 2,14\text{ns}$. Der Radius der Schraubenlinie wird nur von der z -Komponente bestimmt $r = v_z m_e / eB = 6,9\text{mm}$. Die Umlaufzeit beträgt $T = 2\pi r/v_z = 0,357\text{ns}$. Damit gibt es $\tau/T \approx 6$ Schraubenumdrehungen, von denen jede $2,5\text{cm}$ hoch ist.
- 7) Der Lichtbogen besteht aus einem Plasma geladener Partikel.
- 8) Rechte und Linke Drei-Finger-Merkregel
- 9) $\frac{e}{m} = \frac{2U_A \cdot Z^2}{B^2 l^2 (L + l/2)^2} \approx 1,73 \cdot 10^{11}\text{C/kg}$
- 10) b) Die Isotope haben ${}^6m = 177 \cdot m_p \approx 295,6 \cdot 10^{-27}\text{kg}$ bzw. ${}^7m = 178 \cdot m_p \approx 297,3 \cdot 10^{-27}\text{kg}$ Masse. Zur anfänglichen kinetische Energie $\frac{1}{2}mv_0^2$ wird $e \cdot U_A$ addiert, um die kinetische Energie beim Austritt aus der Anode zu erhalten. Folgt: $v_{\text{min}} = 1,27 \cdot 10^4\text{m/s}$, $v_{\text{max}} = 1,62 \cdot 10^4\text{m/s}$. c) Nur die Ionen mit $v = E/B = 1,6 \cdot 10^4\text{m/s}$ kommen durch. Diese traten mit $v_0 = 0,968 \cdot 10^4\text{m/s}$ aus der Quelle. d) $z = \frac{m}{q} \cdot \frac{2E}{B^2}$. Für ${}^6\text{Li}$: $z = 118\text{mm}$. Für ${}^7\text{Li}$: $z = 119\text{mm}$