Roter Faden Physik

Drehen und Rollen

3. Auflage

Mit Aufgaben und Lösungen

von

Dr. Ortwin Fromm

Evangelische Schule Frohnau, Berlin

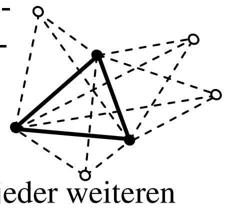
 fromm@ev-frohnau.de

http://www.ev-frohnau.de/faecherprojekte/physik/roter-faden-physik/

A) Der starre Körper und seine Bewegungsmöglichkeiten

1) Der *starre Körper*.
In der klassisch-mechanischen Modellvorstellung denkt man sich jeden realen Körper zusammengesetzt aus Massepunkten (MPs). In deformierbaren festen Körpern, wie auch in Flüssigkeiten und Gasen, sind die Massepunkte gegeneinander *beweglich*.
Beim *starren* Körper sind die relativen Lagen seiner N Massepunkte gegenseitig *fixiert*. Der starre Körper stellt eine Idealisierung dar.

2) *Freiheitsgrade* der Bewegung eines *frei* im Raume beweglichen starren Körpers.
Ein *freier* Massepunkt kann sich in den *drei* unabhängigen Raumrichtungen x, y, z bewegen. Deshalb schreibt man ihm $f=3$ Freiheitsgrade zu. Ein System aus N frei beweglichen Massepunkten hat somit $f = N \cdot 3$ Freiheitsgrade. Jetzt werden die MPs untereinander *starr* verkoppelt: Das liefert viele Nebenbedingungen (NBs), welche f mindern. Zunächst meint man, alle gegenseitigen Verkopplungen abzählen zu müssen. Das wären $(N-1)+(N-2)+...+2+1=(N-1)\cdot N/2$ NBs. Bei z.B. $N = 10$ MPs hätte man 45 NBs, sodass die Anzahl der verbleibenden Freiheitsgrade $f = 10\cdot 3-45=-15$ *negativ* wäre, was Unsinn ist. Die NBs müssen also anders abgezählt werden: Zunächst verkoppelt man *drei* nicht auf einer Gerade liegende MPs und verbindet diese zu einem *starren Dreieck*. Die Seitenlängen dieses Grunddreieckes liefern 3 NBs. Jetzt werden die übrigen N-3 MPs Schritt für Schritt an das Grunddreieck „montiert", indem jeweils *drei* „Stangen" zu den Ecken dieses Dreieckes gesetzt werden. Durch *drei* Stangen sitzt jeder weiteren MP fest am Grunddreieck. Das liefert weitere $(N-3)\cdot 3$ NBs. Zusammen hat man also $3+(N-3)\cdot 3 = N\cdot 3-6$ NBs. Somit besitzt *jeder* starre Körper, unabhängig von der Anzahl N seiner MPs stets genau $f = N\cdot 3-(N\cdot 3-6)=\underline{\underline{6}}$ Freiheitsgrade. Diese sechs verbleibenden Freiheitsgrade lassen sich in *zwei* Gruppen zu je dreien zusammenfassen.



3) Sinnvolle *Gruppierung* der verbleibenden sechs Freiheitsgrade.
Seien $F_1^ä, F_2^ä, ...$ die *äußeren* Kräfte, welche auf die MPs wirken und $F_{i,k}$ die *inneren* Kräfte, welche *zwischen* den MPs wirken. Betrachte nun die N Newton'schen Gleichungen für sämtliche MPs , addiere sie und gruppiere die Summanden um:

$$m_1 a_1 = F_{1,Ges} = F_1^ä + F_{1,2}+F_{1,3}+F_{1,4}+....+F_{1,N}$$

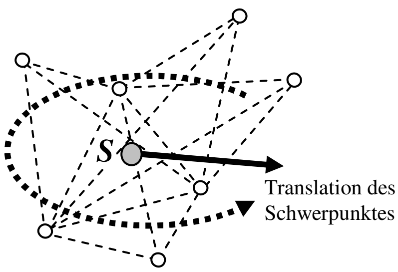
$$+\; m_2 a_2 = F_{2,Ges} = F_2^ä + F_{2,1}+F_{2,3}+F_{2,4}+....+F_{2,N}$$

...

$$+\; m_N a_N = F_{N,Ges} = F_N^ä + F_{N,1}+F_{N,2}+F_{N,3}+....+F_{N,N-1}$$

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 + ... + m_N a_N = F_1^ä + F_2^ä + ... + F_N^ä + (F_{1,2}+F_{2,1})+(F_{1,3}+F_{3,1})+(F_{1,4}+F_{4,1})+....$$

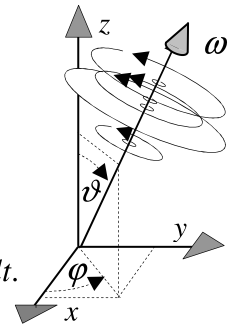
Die inneren Kräfte *heben sich* aber *paarweise auf*, denn wegen des 3. Newton'schen Axioms (actio = reactio) gilt z.B. $F_{1,2}=-F_{2,1}$ usw.. Desweiteren gilt $a_i = \dot{v}_i = \ddot{x}_i ;\forall i$, so dass $m_1 a_1 + m_2 a_2 + ... + m_N a_N$ als $\left(m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_N x_N\right)^{\cdot\cdot}$ geschrieben werden kann.
Mit $F_1^ä + F_2^ä + ... + F_N^ä = F_{Ges}^ä$ folgt daher $\left(m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_N x_N\right)^{\cdot\cdot} = F_{Ges}^ä$.
Nun kennen wir die Schwerpunktkoordinate $x_S = \left(m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_N x_N\right)/m_{Ges}$.
Einsetzen ergibt $\boxed{m_{Ges}\cdot \ddot{x}_S = F_{Ges}^ä}$ (Schwerpunktsatz).



Der *Schwerpunkt* eines *freien* starren Körpers bewegt sich wie ein einzelner Massepunkt. Seine *Translations*bewegung nimmt somit *drei* Freiheitsgrade auf.
Damit sind nur noch *drei* verbleibende Freiheitsgrade physikalisch zu deuten. – Sie entpuppen sich *Rotation*-Freiheitsgrade aller MPs *um* eine Schwerpunktachse.

4) Rotation, Zusammenfassung, Aussicht.

Die *freie* Bewegung eines starren Körpers ist die Überlagerung einer *Translation* des Schwerpunktes (3FG) und einer *Rotation* um eine *Schwerpunktachse*. Die räumliche Orientierung der Drehachse erfordert *zwei* Winkelangaben, *eine* weitere Angabe wird für die Drehgeschwindigkeit gebraucht. Die Drehbewegung bindet also auch 3FG's.



*Zwangs*bedingungen ermöglichen auch Drehungen um *andere* Achsen. Beim schlupffreien *Rollen* sind Rotation und Translation fest *verkoppelt*.

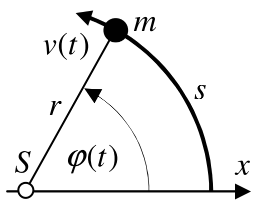
B) Rotation um eine raumfeste Achse.

Die raumfeste Achse sei z, die Drehbewegung *aller* MPs erfolgt dann || zur $x\,y$ - Ebene.

1) Die *Beschreibungsgrößen* der Drehbewegung entsprechen denen der linearen Bewegung.

Lin. Bewegung	Ort x	Geschw. $v = \dot{x}$	Beschleunigung $a = \ddot{x}$
Drehbewegung	Winkel φ	Winkelgeschw $\omega = \dot{\varphi}$	Winkelbeschleunigung $\alpha = \ddot{\varphi}$

Ein MP der Masse m drehe sich mit *starren* Abstand r um den Schwerpunkt S. Die Drehbewegung wird durch den veränderlichen Winkel $\varphi(t)$ beschrieben. φ wird im Bogenmaß (RAD) gemessen. Die Winkelgeschwindigkeit ω ist dann die erste Ableitung von φ bzgl. t $\boxed{\omega = \dot{\varphi}}$. Während der Drehung legt der MP das Bogenstück $s = r \cdot \varphi$ zurück. Daher folgt $v = \dot{s} = r \cdot \dot{\varphi}$ bzw. $\boxed{v = r \cdot \omega}$.

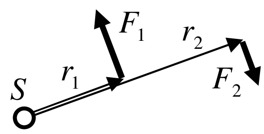


Bei *konstanter* Winkelgeschwindigkeit gilt $\omega = 2\pi / T$ bzw. $\boxed{\omega = 2\pi \cdot f}$.

Ändert sich die Winkelgeschw., so ist die Winkelbeschleunigung $\boxed{\alpha = \ddot{\varphi}}$ ungleich null.

2) Trägheits- und Bewegungsgesetz der Drehbewegung, Drehmoment.

Bei der linearen Bewegung verbleibt ein MP im Zustand seiner Bewegung, d.h. er bleibt in Ruhe oder behält seine Geschwindigkeit bei, wenn die resultierende Kraft null ist.



Analog fragt man sich, unter welchen Bedingungen rotierende MPs ihre Winkelposition beibehalten, bzw. mit konstanter Winkelgeschwindigkeit weiter rotieren.

Die Antwort liefert das *Hebelgesetz* : Falls $\text{Kraftarm}_1 \times \text{Kraft}_1 + \text{Kraftarm}_2 \times \text{Kraft}_2 = 0$, erfolgt *keine* Winkelbeschleunigung.

Das Produkt $M = \text{Kraftarm} \times \text{Kraft}$ heißt *Drehmoment*: $\boxed{M = r \cdot F}$

> Das *Trägheitsgesetz* der Drehbewegung lautet daher: Ein Körper verbleibt im Zustand seiner Rotation, d.h., er behält seinen Winkel bei, bzw. rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit weiter, wenn das resultierende Drehmoment M null ist.

3) *Drehmoment M*, *Drehimpuls L* und *Trägheitsmoment J* .

Der Ausdruck für das Drehmoment $M = r \cdot F$ wird nun mittels $F = m \cdot a$ umgeschrieben: $M = r \cdot F = r \cdot m \cdot a = r \cdot m \cdot \dot{v} = r \cdot m \cdot (r\omega)^{\boldsymbol{\cdot}} = m\,r^2 \cdot \dot{\omega} = m\,r^2 \cdot \alpha$.

Eine Analogiebetrachtung zeigt, dass der der Ausdruck $(m\,r^2)$ der Masse m entspricht.

Kraft (F)	=	Masse (m)	×	Beschleunigung	$a = \ddot{x}$
Drehmoment (M)	=	$(m\,r^2)$	×	Winkelbeschleunigung	$\alpha = \ddot{\varphi}$

Der Ausdruck $m\,r^2$ bekommt einen eigenen Namen: $\boxed{\textit{Trägheitsmoment}:\ J = m\,r^2}$.

Für einen starren Körper mit *vielen* rotierende MPs gilt $\boxed{J = m_1\,r_1^2 + m_2\,r_2^2 + \ldots + m_N\,r_N^2}$

Analog zu $\boxed{F = m \cdot \ddot{x}}$ lautet das Drehmomentgesetz somit $\boxed{M = J \cdot \ddot{\varphi}}$.

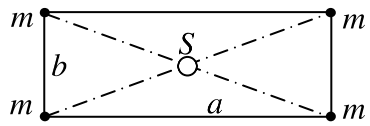
Das Produkt Masse$\times$Geschwindigkeit heißt *Impuls* p. Analog dazu wird auch Trägheitsmoment$\times$Winkelgeschwindigkeit zum *Drehimpuls* L zusammengefasst.

Analog zur Schreibweise $\boxed{F = \dot{p}}$ lautet das Drehmomentgesetz damit $\boxed{M = \dot{L}}$

Das *Trägheitsgesetz* der Drehbewegung verallgemeinert sich somit: Ist das resultierende *Drehmoment* M gleich null, so bleibt der *Drehimpuls* L erhalten. Ist das Drehmoment ungleich null, so ändert sich der Drehimpuls entsprechend.

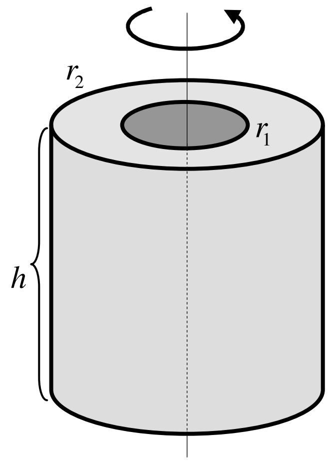
4) Berechnung von *Trägheitsmomenten* spezieller Körper.

a) *Rechteck* mit gleichen Massen auf den Ecken.



Die Abstandsquadrate vom Drehpunkt S zu den Massen m betragen jeweils $a^2/4 + b^2/4$. Damit ergibt sich $J = 4m\cdot\left(a^2/4 + b^2/4\right) = \underline{\underline{m\cdot\left(a^2 + b^2\right)}}$

b) *Homogener* Hohlzylinder.



Die Summation wird nun durch Integration vollzogen:
Im variablen Abstand r, mit $r_1 \le r \le r_2$, befindet das Volumen $\Delta V \approx h\cdot 2\pi r\cdot\Delta r$. Dieses ist gleichmäßig mit Masse der Dichte ρ belegt. Damit rotiert die Masse $\Delta m \approx \rho\cdot h\cdot 2\pi r\cdot\Delta r$ im Abstand r um die Achse.
Limes $\Delta r \to 0$ ersetzt Summation durch Integration:

$$J = \int_{r_1}^{r_2} r^2\cdot(dm) = \int_{r_1}^{r_2} r^2\cdot(\rho\cdot h\cdot 2\pi r\cdot dr) = \rho\cdot h\cdot 2\pi\int_{r_1}^{r_2} r^3 dr$$

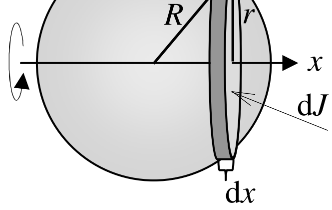
$$= \rho\cdot h\cdot 2\pi\left[\frac{1}{4}r^4\right]_{r_1}^{r_2} = \frac{1}{4}\rho\cdot h\cdot 2\pi\left(r_2^4 - r_1^4\right) =$$

$= \frac{1}{2}\rho\cdot h\cdot\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)\left(r_2^2 + r_1^2\right)$. Die Masse ergibt sich aus $m = \rho\cdot\text{Grundfläche}\times\text{Höhe}$,

$m = \rho\cdot\left(\pi r_2^2 - \pi r_1^2\right)\cdot h$. Einsetzen liefert die allgemeine Formel $\boxed{J = \frac{m}{2}\left(r_2^2 + r_1^2\right)}$

c) *Vollzylinder*: $r_2 = R$; $r_1 = 0 \Rightarrow J = R^2\frac{m}{2}$ bzw. $\boxed{J_{voll} = \frac{1}{2}mR^2}$

d) *Kugel* mit Radius R und Dichte ρ:



Das Drehmoment der Kugel ergibt sich aus der Summe der Drehmomente seiner einzelnen Vollzylinderscheiben.
Die Summation wird wieder durch Integration vollzogen:

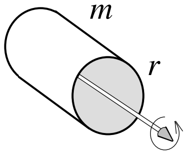
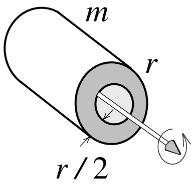
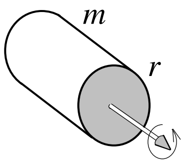
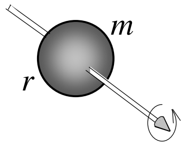
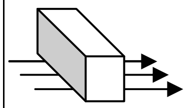
$$J = \int_{-R}^{R} dJ = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} r^2 dm = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} r^2\rho\cdot dV = \frac{\rho}{2}\int_{-R}^{R} r^2\cdot(r^2\pi)\cdot dx$$

$$= \frac{\rho\pi}{2}\int_{-R}^{R} r^4 dx = \frac{\rho\pi}{2}\int_{-R}^{R}\left(R^2 - x^2\right)^2 dx = \frac{\rho\pi}{2}\int_{-R}^{R}\left(R^4 - 2R^2x^2 + x^4\right)dx$$

$$= \frac{\rho\pi}{2}\left[R^4\cdot x - \frac{2}{3}R^2x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_{-R}^{R} = \frac{\rho\pi}{2}\left(R^4\cdot 2R - \frac{2}{3}R^2\cdot 2R^3 + \frac{1}{5}\cdot 2R^5\right) = \frac{\rho\pi}{\cancel{2}}\cdot\frac{\overset{8}{\cancel{16}}}{15}R^5.$$

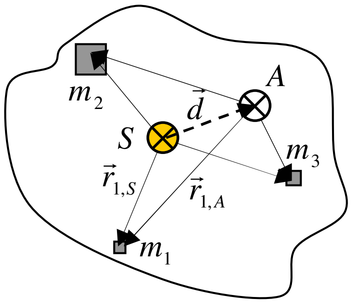
Die Kugelmasse beträgt $m = \rho\cdot V = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$. Damit folgt $\boxed{J_{Kugel} = \frac{2}{5}mR^2}$.

5) Überblick: Trägheitsmomente

Rollkörper					Reibungsfreies Gleiten ohne Drehung 
Typ	Zylinderhaut	Halbzylinder	Vollzylinder	Kugel	Gleiten
J	$J = 1 \cdot m R^2$	$J = \frac{5}{8} \cdot m R^2$	$J = \frac{1}{2} \cdot m R^2$	$J = \frac{2}{5} \cdot m R^2$	$J = 0$
k =	1	5 / 8 = 0,625	1 / 2 = 0,5	2 / 5 = 0,4	0

Die Trägheitsmomente der untersuchten Körper haben alle die Form $\boxed{J = k \cdot m R^2}$

6) *Steinerscher* Satz: Verschiebung der Drehachse



Einfachheitshalber betrachten wir von einem starren Körper nur drei MPs. Diese rotieren zunächst um eine Schwerpunktachse, bzgl. derer das Trägheitsmoment $J_S = m_1 \cdot r_{1,S}^2 + m_2 \cdot r_{2,S}^2 + m_3 \cdot r_{3,S}^2$ lautet. Nun wird die Drehachse durch *äußeren Zwang* parallel verschoben, sodass sie durch A verläuft. Bzgl. der neuen Achse gilt dann $J_A = m_1 \cdot r_{1,A}^2 + m_2 \cdot r_{2,A}^2 + m_3 \cdot r_{3,A}^2$.

Den Zusammenhang zwischen J_A und J_S berechnen wir mit Hilfe der Vektorrechnung.

Es gilt $\vec{r}_{1,A} = \vec{r}_{1,S} - \vec{d}$, $\vec{r}_{2,A} = \vec{r}_{2,S} - \vec{d}$ und $\vec{r}_{3,A} = \vec{r}_{3,S} - \vec{d}$. Dies wird eingesetzt:

$$J_A = m_1 \cdot \left(\vec{r}_{1,S} - \vec{d}\right)^2 + m_2 \cdot \left(\vec{r}_{2,S} - \vec{d}\right)^2 + m_3 \cdot \left(\vec{r}_{3,S} - \vec{d}\right)^2$$

$$J_A = m_1 \cdot \left(r_{1,S}^2 - 2\vec{r}_{1,S} \cdot \vec{d} + d^2\right) + m_2 \cdot \left(r_{2,S}^2 - 2\vec{r}_{2,S} \cdot \vec{d} + d^2\right) + m_3 \cdot \left(r_{3,S}^2 - 2\vec{r}_{3,S} \cdot \vec{d} + d^2\right)$$

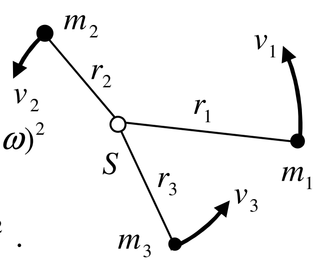
$$J_A = \left(m_1 \cdot r_{1,S}^2 + m_2 \cdot r_{2,S}^2 + m_3 \cdot r_{3,S}^2\right) - 2\vec{d} \cdot \left(m_1 \vec{r}_{1,S} + m_2 \vec{r}_{2,S} + m_3 \vec{r}_{3,S}\right) + d^2 \left(m_1 + m_2 + m_3\right).$$

Die erste Klammer ist J_S. Die zweite Klammer ist null, denn der Term berechnet den Schwerpunkt vom Schwerpunkt aus. In der dritten Klammer steht die Gesamtmasse.

Ergebnis: $\boxed{J_A = J_S + d^2 \cdot m}$. Dabei ist $m = \sum m_k$ die Gesamtmasse des Körpers.

Wichtig wird der Steinersche Satz beim *Rollen* eines Körpers: Rollen ist Drehen um die zur Körperachse parallele Abrollachse durch den Berührpunkt auf der Unterlage. (s. D2)

Kinetische Energie der Rotationsbewegung.



Alle MPs rotieren mit dergleichen Winkelgeschwindigkeit ω.
Für die nebenstehende Skizze ergibt sich somit

$$W_{rot} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 = \frac{1}{2} m_1 (r_1 \omega)^2 + \frac{1}{2} m_2 (r_2 \omega)^2 + \frac{1}{2} m_3 (r_3 \omega)^2$$

bzw. $W_{rot} = \frac{1}{2}\left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \sum m_k r_k^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2$.

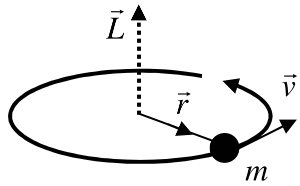
Die Klammer ist gerade das Gesamtträgheitsmoment, also : $\boxed{W_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2}$.

7) <u>Zusammenfassender *Vergleich* von Translations- und Rotationsbewegung.</u>

Translation		$\longleftrightarrow$	Rotation	
Strecke	$x(t)$	$x = r \cdot \varphi$	Winkel	$\varphi(t)$
Geschwindigkeit	$v(t) = \dot{s}(t)$	$v = r \cdot \omega$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$
Beschleunigung	$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$	$a = r \cdot \alpha$	Winkelbeschleunigung	$\alpha(t) = \dot{\omega}(t) = \ddot{\varphi}(t)$
Masse	m		Trägheitsmoment	$J = r_1^2\, m_1 + ...$
Impuls	$p = m\,v$		Drehimpuls	$L = J\,\omega$
Kraft	$F = \dot{p}$ bzw. $F = m \cdot a$		Drehmoment	$M = \dot{L}$ bzw. $M = J \cdot \alpha$
Translations-energie	$W_{Trans} = \frac{1}{2} m\, v^2$	Kinetische Energie	Rotationsenergie	$W_{rot} = \frac{1}{2} J\, \omega^2$

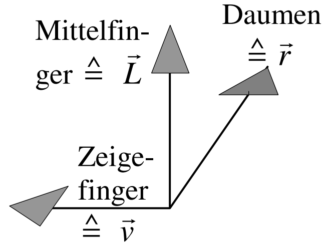
C) Räumliche Drehung (Kreiselbewegung)

1) <u>Drehimpuls als *vektorielle Größe*.</u>



Die Richtung des Drehimpulsvektors ergibt sich aus der „*Korkenzieher*-Regel" der *rechten* Hand: Vier Finger folgen der Drehbewegung, der Daumen liefert die $\vec{L}$-Richtung.

Man erhält die $\vec{L}$-Richtung auch mittels des Kreuzprodukt der Vektorrechnung : $\boxed{\vec{L} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}}$.



2) <u>Kreuzprodukt der Vektorrechnung.</u>

Die Richtungen im Kreuzprodukt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ergeben aus der *Drei-Finger-Regel* der rechten Hand:
Daumen $\hat{=}$ $\vec{a}$; Zeigefinger $\hat{=}$ $\vec{b}$. Der Mittelfinger liefert $\vec{c}$.

3) <u>Drehmoment als *vektorielle Größe*.</u>

Der Drehmomentvektor ergibt sich ebenfalls aus einem Kreuzprodukt $\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$ Also:
Daumen $\hat{=}$ $\vec{r}$; Zeigefinger $\hat{=}$ $\vec{F}$. $\Rightarrow$ Mittelfinger $\hat{=}$ $\vec{M}$.

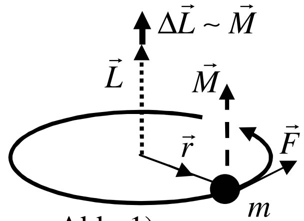


Abb. 1)

In Abb. 1) wirkt die Kraft $\vec{F}$ <u>längs der Kreiseldrehung</u>. Deshalb ist $\vec{M}$ *parallel* zu $\vec{L}$. Die Richtung von $\vec{L}$ bleibt erhalten, nur der Betrag nimmt zu. $\Rightarrow$ Das Rad dreht sich schneller, die Drehachse bleibt erhalten.

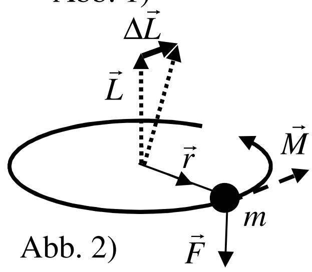


Abb. 2)

In Abb. 2) wirkt die Kraft $\vec{F}$ <u>nach unten</u>. Dadurch zeigt $\vec{M}$ in Laufrichtung nach schräg hinten. $\Delta\vec{L}$ zeigt also auch nach schräg hinten, sodass der Drehimpuls $\vec{L}$ entsprechend kippt. Der Kreisel weicht also rechtwinklig zur wirkenden Kraft aus.

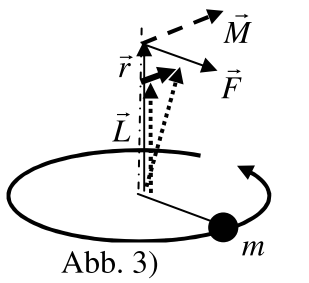
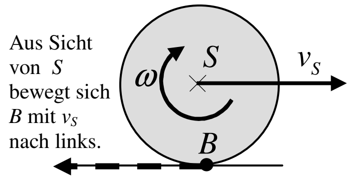


Abb. 3)

In Abb. 3) greift die Kraft $\vec{F}$ an der Achse an und wirkt <u>nach schräg vorne</u>. $\vec{M}$ zeigt dann rechtwinklig dazu nach schräg hinten. Dadurch verändert sich $\vec{L}$ ebenfalls in diese Richtung, sodass Achse und Drehebene wieder kippen. Der Kreisel weicht also wieder rechtwinklig zur wirkenden Kraft aus.

D) <u>Schlupffreies Rollen.</u>



Beim schlupffreien Rollen ruht der jeweilige Berührpunkt B auf dem Untergrund. Der Schwerpunkt bewege sich mit der Geschwindigkeit v_S nach rechts. Aus Sicht von S bewegt sich der Punkt B dann mit der Geschwindigkeit v_S nach links.
Daher stimmen die Drehgeschwindigkeit $v = r \cdot \omega$ von B und die Schwerpunktsgeschwindigkeit v_S überein: $\boxed{v_S = r \cdot \omega}$

Gleitet das Rad durch *Schlupf* beim Bremsen oder Anfahren, so gilt diese Gleichung *nicht*.

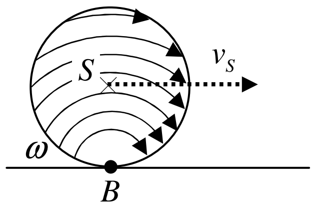
Die *gesamte kinetische Energie der Rollbewegung* erhält man ….

1) … entweder durch Addition von Translations- und Rotationsenergie.
W_{Roll} ist dann also die *Summe* von *zwei* kinetischen Energien: $W_{Roll} = W_{Trans} + W_{rot}$
Für die Drehmomente der untersuchten Rollkörper galt $J = k \cdot m r^2$, s. B5). Daraus folgt

$$W_{Roll} = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} J_S\, \omega^2 = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} k \cdot m r^2 \omega^2 = \frac{1}{2} m \cdot \left(v_S^2 + k \cdot v_S^2 \right) = \frac{m}{2}\left(1+k \right) \cdot v_S^2 \; .$$

Also $\boxed{W_{Roll} = \frac{1}{2}\left[m \cdot \left(1+k \right) \right] \cdot v_S^2}$. Der Ausdruck $m \cdot \left(1+k \right)$ heißt „*Rollersatzmasse*".

2) … oder mit Hilfe des Satzes von Steiner:

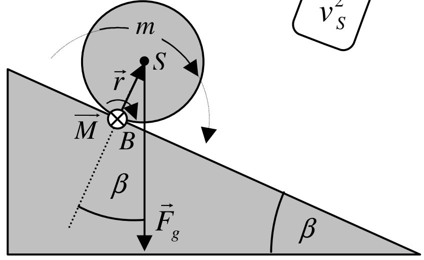


Man kann die Rollbewegung auch als *einfache* Drehung *ohne* Translation interpretieren. Die Drehung erfolgt dann für alle Körperpunkte zu jedem Zeitpunkt um den jeweiligen Berührpunkt B. Das Trägheitsmoment J_B um die Achse durch B erhält man aus dem Trägheitsmoment J_S um die Achse durch S mit Hilfe des Satzes von Steiner: $J_B = J_S + r^2 \cdot m$.
Dieses Trägheitsmoment in die Formel der Rotationsenergie einsetzen:

$$W_{Roll} = W_{rot,B} = \frac{1}{2} J_B\, \omega^2 = \frac{1}{2}\left(J_S + r^2 \cdot m \right) \omega^2 = \frac{1}{2}\left(k \cdot m r^2 + r^2 \cdot m \right) \omega^2 = \frac{1}{2} m \left(k+1 \right) \underbrace{r^2 \omega^2}_{v_S^2}$$

Beide Betrachtungsweisen liefern also dasselbe Ergebnis für W_{Roll}.

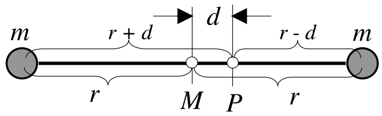
3) <u>Abrollen eines Rollkörpers auf der schiefen Ebene</u>.



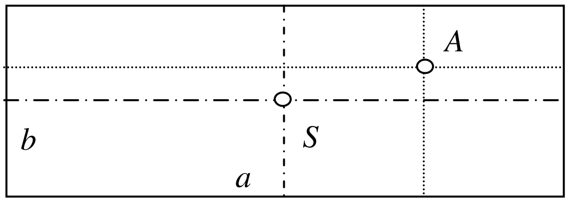
Es gibt zwei Arten, das Abrollen zu betrachten (siehe Aufg. 4) Hier soll die Drehbewegung um den jeweiligen Berührpunkt B und der Satz von Steiner verwendet werden. Der Hebelarm $\vec{r}$ (Daumen, *rechte* Hand) zeigt vom Drehpunkt B zum Schwerpunkt S auf der Körperachse. (Daumen in Richtung der $\vec{r}$-Komponente $\perp$ zu $\vec{F}_g$ halten).
In S greift die Kraft $\vec{F}_g$ (Zeigerfinger) an. Der Mittelfinger liefert dann die Richtung des Drehmomentes $\vec{M}$; es zeigt in die Papierebene, sodass die Rechte-*Korkenzieher*-Regel den *negativen* Drehsinn liefert. Während des Abrollens bleiben die Drehachse und $\vec{M}$ *parallel*, sodass die Betragsgleichung von $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_g = \dot{\vec{L}}$ reicht: $r \cdot mg \cdot \sin\beta = J_B \cdot \ddot{\varphi}$.
Gesucht ist die Translationsbeschleunigung a längs der schiefen Ebene. Einsetzen von $\ddot{\varphi} = a / r$ und Steiner-Satz $J_B = J_S + r^2 m = k \cdot m r^2 + r^2 m = m \cdot (k+1)\, r^2$ liefert die *konstante* Translationsbeschleunigung längs der schiefen Ebene $a = \underline{\underline{\frac{g \sin\beta}{k+1}}}$.

E) Aufgaben

1) Die Drehachse einer symmetrischen Hantel verlaufe zunächst senkrecht zur Hantelachse durch M. Bestätige den Satz von Steiner am Beispiel einer parallelen Drehachsenverschiebung um d . (Siehe Abb.)



2) An den vier Ecken eines Rechteckes mit $a = 40\,cm$ und $b = 15\,cm$ befindet sich jeweils eine Masse von $m = 300\,g$.



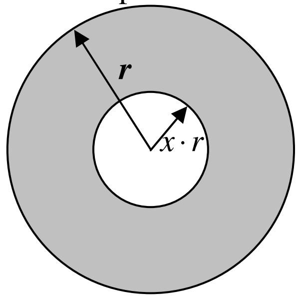
   a) Berechne das Trägheitsmoment J_S um eine Achse durch den Rechteckmittelpunkt (Schwerpunkt) S, die senkrecht zur Recheckfläche steht.
   b) Die Seite a wird nun im Verhältnis 3 : 1 und die Seite b im Verhältnis 2 : 1 geteilt, so das man den Punkt A erhält.
   c) Berechne das Trägheitsmoment J_A um eine zur alten Achse parallele Achse durch A.

   Bestätige durch Vergleich von J_A und J_S den Satz von Steiner $J_A = J_S + m_{Ges} \cdot \left(\overline{SA}\right)^2$.

3) Vergleiche den Drehimpuls der Sonne (als homogener Kugel) mit dem Gesamtdrehimpuls der neun Planeten (als Massepunkte). Entnimm Masse, Radius um Eigenumlaufzeit der Sonne, sowie die Massen und Bahnradien der Planeten den einschlägigen Tabellenwerken.

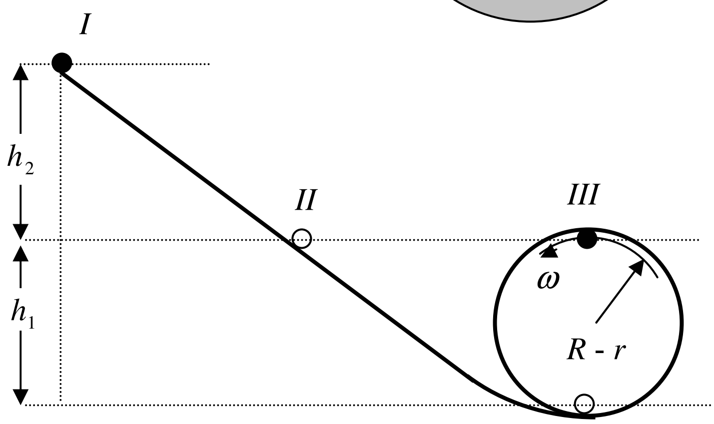
4) Ein Hohlzylinder hat den Außenradius r und den Innenradius $x \cdot r$ mit $0 \leq x < 1$.
   Beweise: Für das Trägheitsmoment J gilt : $J = ½\, m_{Ges}\, r^2 \cdot \left(1 + x^2\right)$

   Der Hohlzylinder *rollt* mit der Geschwindigkeit v auf einer waagerechten Tischplatte.
   Stelle eine Formeln auf für die
   a) Translationsenergie.
   b) Rotationsenergie.
   c) gesamte kinetische Energie $E_{kin,Roll}$.
   d) Lässt sich ein Hohlzylinder so formen, dass er bei gleicher Masse und gleichem Radius das Trägheitsmoment der Kugel hat?



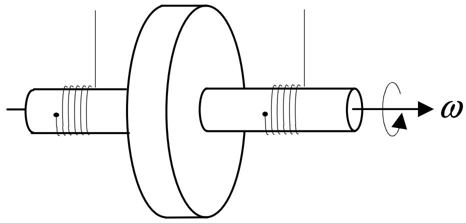
5) Ein Rollkörper mit Masse m , Radius r und Trägheitsmoment $J = k \cdot m\,r^2$ (für die Kugel gilt z.B. $k = 2/5$) soll in einer Schleifenbahn mit dem Radius R ein Looping vollführen.

   Von welcher Höhe $h_1 + h_2$ muss man den Körper mindestens starten, damit er gerade *den*, *die*, *das* Looping schafft?
   Berechne für
   $m = 150\,g$; $r = 12\,mm; R = 35\,cm$



6) Längs einer schiefen Ebene der Länge S und des Neigungswinkels β (α ist hier Winkelbesch.) rollt ein Rollkörper mit Masse m , Radius r und Trägheitsmoment $J = k \cdot m\,r^2$.
   a) Stelle die Gesamtenergie des rollenden Körpers auf und leite den Ausdruck nach der Zeit ab. Leite so einen Ausdruck für die Bahnbeschleunigung a her.
   b) Wie entwickeln sich daher die Geschwindigkeit v und der Ort s als Funktion der Zeit t ?
   c) Wann trifft der Körper am Ende der schiefen Ebene ein?

7) Ein *Maxwell*sches Rad bestehe aus einem scheibenförmigen Vollzylinder mit Radius r_{Sch} und Masse m_{Sch}. Die beiden angeklebten Achsteile haben den Radius r_A und *zusammen* die Masse m_A. Scheibe und Achse drehen sich zwangsläufig mit dem selben ω.



Auf den Achsen sind Fäden aufgewickelt. Es gelte $r_{Sch} = 18cm$; $m_{Sch} = 160g$; $r_A = 1{,}5cm$ $m_A = 24g$. Nach welcher Zeit τ sinkt das Rad aus der Ruhe um $H = 0{,}8m$?

8) Eine Kupplungsscheibe mit dem Trägheitsmoment J_1 rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1. Es wird eine zweite Scheibe mit dem Trägheitsmoment J_2 angekuppelt, die zuvor in Ruhe war. Mit welcher Winkelgeschwindigkeit rotieren die beiden Scheiben nach der Ankupplung? Nach welcher Zeit T sinkt das Rad um $H = 0{,}8m$

9) Ein Vollzylinder dreht mit der Drehzahl n (Maßeinh: Umdrehungen pro Sekunde, also: s^{-1})
   a) Wie groß ist der Drehimpuls L?
   b) Es wirke ein konstantes Drehmoment M. Wann verdoppelt sich die Drehzahl?
   c) Setze $n = 20s^{-1}$; $m = 500g$; $r = 25cm$; $M = 20N\cdot m$,

10) Das Vorderrad eines Radfahrers, hat einen Kippwinkel $\alpha = 10°$. Um nicht umzukippen, muss der Fahrer eine Kurve fahren. Welcher Radius ist erforderlich, wenn die Geschwindigkeit $v = 12\ km/h$ beträgt?

11) Ein Schnellzug durchfährt mit $v = 180\ km/h$ eine Kurve vom Radius $r = 3200m$. Wie groß muss die Überhöhung $\ddot{U}$ (in mm) der äußeren Schiene (Spurweite $w = 1435mm$) sein, damit beide Schienen gleich stark belastet werden?

12) Unter welchem Winkel darf eine Garnrolle höchstens gezogen werden, um nicht nach hinten zu rollen? (Außendurchmesser $2r_1 = 6cm$, Garndurchmesser $2r_2 = 5{,}8cm$)

<u>Lösungen</u>

1) $J_M = m\cdot r^2 + m\cdot r^2 = 2m\cdot r^2$.

$J_P = m\cdot(r+d)^2 + m\cdot(r-d)^2 = m\cdot(r^2+\cancel{2rd}+d^2) + m\cdot(r^2-\cancel{2rd}+d^2) = 2m\cdot r^2 + 2m\cdot d^2$

Steiner: $J_P = J_M + (m+m)\cdot d^2 = \underbrace{2m\cdot r^2}_{J_M} + 2m\cdot d^2$ ✓

2) Rechteck

a) $J_S = 4\cdot m\cdot\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right)$ b) $J_A = 2\cdot m\cdot\left(\left(\frac{b}{3}\right)^2+\left(\frac{a}{4}\right)^2+\left(\frac{3a}{4}\right)^2+\left(\frac{2b}{3}\right)^2\right) = \frac{5}{36}\cdot m\cdot\left(9a^2+8b^2\right)$

b) $\overline{SA} = \sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2+\left(\frac{b}{6}\right)^2}$; $J_S + m\cdot\left(\overline{SA}\right)^2 = 4m\cdot\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right) + 4m\left(\left(\frac{a}{4}\right)^2+\left(\frac{b}{6}\right)^2\right) = \frac{5}{36}m\cdot\left(9a^2+8b^2\right)$

3) $T_S \approx 25{,}4\cdot 24\cdot 3600s; M_S \approx 2\cdot 10^{30}kg; r_S \approx 7\cdot 10^8 m \Rightarrow L_S = 2/5\cdot M_S\cdot R_S^2\cdot 2\pi/T_S \approx \underline{1{,}1\cdot 10^{42}kg\,m^2/s}$

Planeten: $L_i = J_i\cdot\omega_i = M_i\cdot r_i^2\cdot\frac{2\pi}{T_i}$; $T_i^2 = 4\pi^2 r^3/\gamma M_S \Rightarrow L_i^2 = M_i^2 R_i^4\cdot\frac{\cancel{4\pi^2}\gamma M_S}{\cancel{4\pi^2}R_i^3} = \gamma M_i^2 M_S R_i$

$\Rightarrow L_i = \sqrt{\gamma M_S}\cdot M_i\cdot\sqrt{R_i}$. Einsetzen gem. Tab.: $\sum_{i=1}^{9} L_i = \underline{3{,}15\cdot 10^{43}\frac{kg\,m^2}{s}} \Rightarrow \frac{L_{Pl}}{L_S} \approx \underline{\underline{28}}$.

Da die Dichte der Sonne zum Rand hin stark abfällt, ist J_S kleiner als berechnet. Tatsächlich steckt ≈ 60 mal mehr Drehimpuls in der Planetenscheibe als in der Sonneneigendrehung.

4) $m = \int_{xR}^{R} \rho\, h\, 2\pi\, r\, dr = R^2 \rho\, h\, \pi \left(1-x^2\right)$; $J = \int_{xR}^{R} r^2 \cdot \rho\, h\, 2\pi\, r\, dr = \frac{1}{2} R^4 \rho\, h\, \pi \left(1+x^2\right)\left(1-x^2\right)$

$$J = \int_{xR}^{R} r^2 \cdot \rho\, h\, 2\pi\, r\, dr = \frac{1}{2} m \left(1+x^2\right) R^2$$

a) $E_{Trans} = \frac{1}{2} m v^2$ b) $E_{rot} = \frac{1}{2} J\, \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m \left(1+x^2\right) R^2 \omega^2 = \frac{1}{4} m \left(1+x^2\right) v^2$

c) $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{4} m \left(1+x^2\right) v^2 = \frac{1}{4} m \cdot \left(3+x^2\right) v^2$

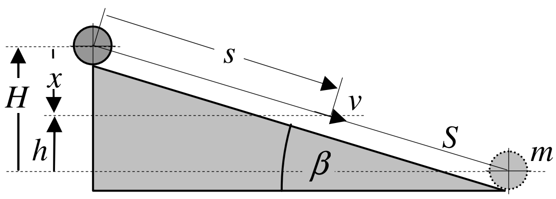
5) Wenn der Körper im Punkt II mit $v=0$ gestartet würde, so hätte er in III wieder die Geschwindigkeit null und würde dort senkrecht runter fallen. Er bleibt in III nur oben, wenn sich dort Radialkraft $F_R = \frac{m v_{III}^2}{R-r}$ und Schwerkraft $F_G = m\, g$ aufheben. In III ist daher die Geschwindigkeit $v_{III} = \sqrt{g\,(R-r)}$ erforderlich, was der kinetische Energie von $E_{kin} = \frac{m}{2}(1+k) v_{III}^2 = \frac{m}{2}(1+k) \cdot g\,(R-r)$ entspricht. Diese Energie muss zwischen I und II gewonnen werden: Daraus ergibt sich die Forderung

$$m\, g\, h_2 = \frac{m}{2}(1+k) \cdot g\,(R-r) \;\Rightarrow\; \underline{\underline{h_2 = \frac{1}{2}(1+k) \cdot (R-r)}}.$$

Dies ins Verhältnis zur Höhe $h_1 = 2 \cdot (R-r)$ gesetzt ergibt $\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{4}(1+k)$. Für die Vollkugel mit $k = \frac{2}{5}$ ergibt sich, dass h_2 ein $7\,/\,20 = 0{,}35$ (also 35%) von h_1 sein muss.

6) Für die kinetische Energie unserer Rollkörper gilt nach B5) $E_{kin,Roll} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (1+k) \cdot v^2$. Anfangs beträgt die potentielle Energie $E_{pot,Start} = m\, g\, H$. Auf der Höhe h gilt $E_{pot} = m\, g\,(H-x) = m\, g\,(H - s\, \sin\beta)$, wobei s die auf der schiefen Ebene *zurückgelegte* Strecke ist. Wir haben also

$$E_{Ges} = \frac{m}{2} \cdot \left(1+k\right) v^2 + m\, g\,(H - s\, \sin\beta).$$



a) Wegen des Energieerhaltungssatzes ist E_{Ges} konstant und die Ableitung somit null. Die Ableitung von s ist gleich der Geschwindigkeit v längs der schiefen Ebene: $\dot{s} = v$. Beachtet man die Kettenregel der Diff-rechnung: $f(x) = \left[u(x)\right]^2 \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot u \cdot u'$, so folgt hier entsprechend, dass $f(t) = \left[v(t)\right]^2$ die Ableitung $\dot{f}(t) = 2 \cdot v \cdot \dot{v}$ hat.

Damit liefert die Ableitung von $E_{Ges} = \frac{m}{2} \cdot \left(1+k\right) v^2 + m\, g\, H - m\, g\, s\, \sin\beta$ die Gleichung $0 = \frac{m}{2} \cdot \left(1+k\right) 2 v \cdot \dot{v} - m\, g\, v\, \sin\beta$. Umstellen ergibt $\dot{v} = a = \frac{g \cdot \sin\beta}{1+k}$.

Das ist ein *konstanter* Wert für die Beschleunigung *längs* der schiefen Ebene.

b) Bei konstanter Beschleunigung gelten die Formeln $v(t) = a \cdot t$ und $s(t) = \frac{1}{2} a\, t^2$.

c) Auflösen der letzten Gleichung nach t liefert $t=\sqrt{\frac{2s}{a}}=\sqrt{\frac{2s\cdot(1+k)}{g\cdot\sin\beta}}$.

Setzt man jetzt für s die Gesamtstrecke S ein, so folgt $t(S)=\sqrt{\frac{2S\cdot(1+k)}{g\cdot\sin\beta}}$.

7) Für das Trägheitsmoment um die Mittelachse gilt $J=J_A+J_S$. Die Doppelbewegung „Drehung um die Mittelachse + Translation" lässt sich als *eine* Drehung um den Abrollpunkt (= Berührpunkt des Fadens) auf dem Achsenrand interpretieren. Nach Steiner gilt $J_B=J_A+J_S+(m_A+m_S)\cdot r_A^2$. Die Kraft greift nach wie vor am Schwerpunkt an, sodass Kraft $F_G=(m_A+m_S)\cdot g$ und Hebelarm r_A senkrecht aufeinander stehen. Aus $M=J_B\cdot\ddot{\varphi}$ und $a=\ddot{\varphi}\cdot r_A$ wird dann $a=\frac{M}{J_B}\cdot r_A=\frac{F_G\cdot r_A}{J_B}\cdot r_A=\frac{(m_A+m_S)\cdot g\cdot r_A^2}{½\cdot\left(m_A r_A^2+m_S r_S^2\right)+(m_A+m_S)\cdot r_A^2}$.

Einsetzen ergibt die *konstante* Beschleunigung $a=0{,}154\ m/s^2$.

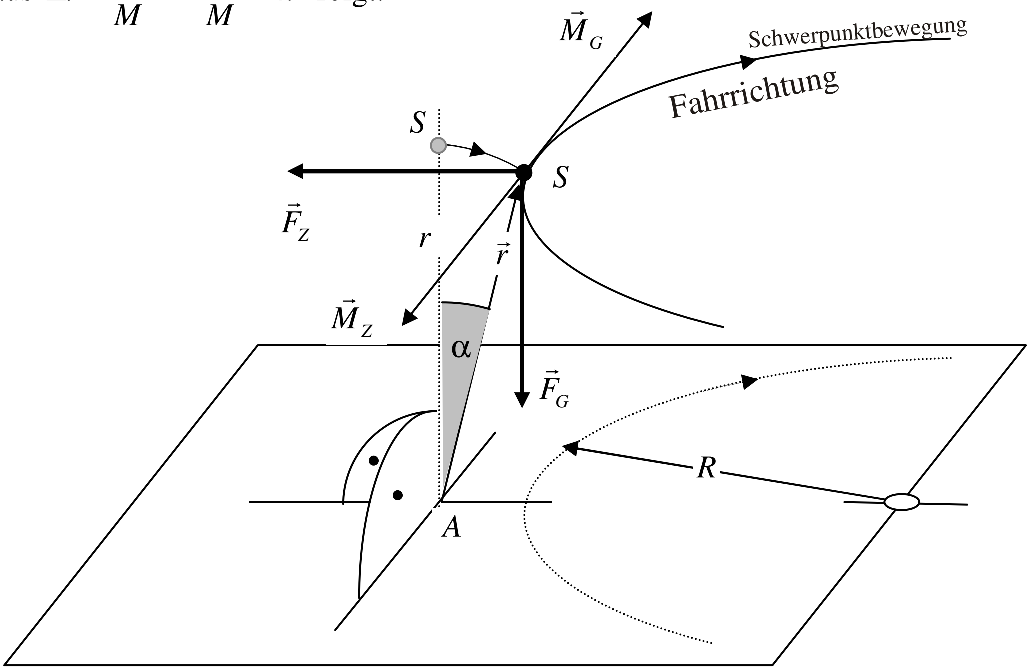
Aus $H=\frac{1}{2}a\tau^2$ folgt dann $\tau=\sqrt{2H/a}=3{,}22\,s$.

Umgekehrt kann man aus H, τ, m_{Ges}, und r_A auf J schließen.

8) Es gilt der Drehimpulserhaltungssatz: $L_{vorher}=L_{nachher}$ mit $L_{vorher}=J_1\cdot\omega_1+J_2\cdot 0\,s^{-1}$ und $L_{nachher}=J_1\cdot\omega_{nachher}+J_2\cdot\omega_{nachher}$. Daraus folgt $\omega_{nachher}=\frac{J_1}{J_1+J_2}\cdot\omega_1$

9) Es gilt $\omega=2\pi\cdot n$ und damit $L=J\cdot\omega=J\cdot 2\pi\cdot n$. Das konstante Drehmoment vergrößert den Drehimpuls linear, so wie eine konstante Kraft den Impuls $p=m\cdot v$ (bzw. die Geschwindigkeit v linear vergrößert). Daher gilt $M=\frac{\Delta L}{\Delta t}$. Bei Verdoppelung ist $\Delta L=L$, woraus $\Delta t=\frac{L}{M}=\frac{J\cdot 2\pi}{M}\cdot n$ folgt. D

10)



Eine Drehbewegung bestimmt sich aus dem wirksamen Drehmoment.

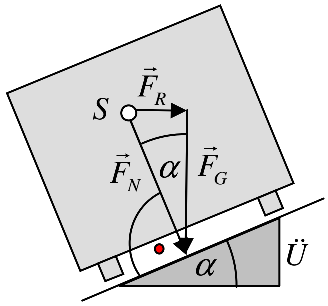
Ein Drehmoment $\vec{M}$ ist eine vektorielle Größe, es ergibt sich aus dem Kreuzprodukt von $\vec{r}$ und $\vec{F}$ zu $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. Aufgrund dessen steht $\vec{M}$ senkrecht auf $\vec{r}$ und $\vec{F}$, sein Betrag ergibt sich aus $M = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin\alpha$ und seine Richtung erhält man aus der „Drei-Finger-Regel" der Rechten Hand: $\vec{r} \triangleq$ Daumen, $\vec{F} \triangleq$ Zeigefinger, $\vec{M} \triangleq$ Mittelfinger.

Wir betrachten die Kurvenfahrt zu einem „eingefrorenen" Zeitpunkt.
Die Drehung erfolgt um den Auflagepunkt A des Rades. Um diesen Punkt dreht sich der gemeinsame Schwerpunkt S von Rad und Fahrer entweder nach innen oder außen.
Der Hebelarm $\vec{r}$ zeigt von A nach S, es gilt also $\vec{r} = \overrightarrow{AS}$. Am Punkte S greifen zwei Kräfte an, 1) die Schwerkraft $\vec{F}_G = mg$ und 2) die Zentrifugalkraft $\vec{F}_Z = mv^2/R$. Damit ergeben sich die beiden Drehmomente $\vec{M}_G$ und $\vec{M}_Z$. Mit der Drei-Finger-Regel macht man sich klar, dass $\vec{M}_G$ tangential *in* Fahrrichtung und $\vec{M}_Z$ tangential *gegen* die Fahrrichtung zeigt. Die beiden Drehmomente müssen sich aufheben, damit der Schwerpunkt weder zu Boden stürzt, noch „aus der Kurve fliegt". Für die Beträge gilt $M_G = r \cdot mg \cdot \sin\alpha$ und

$M_Z = r \cdot \dfrac{mv^2}{R} \cdot \sin(90° - \alpha) = r \cdot \dfrac{mv^2}{R} \cdot \cos\alpha$. Gleichsetzen ergibt $\boxed{v^2 = R \cdot g \cdot \tan\alpha}$

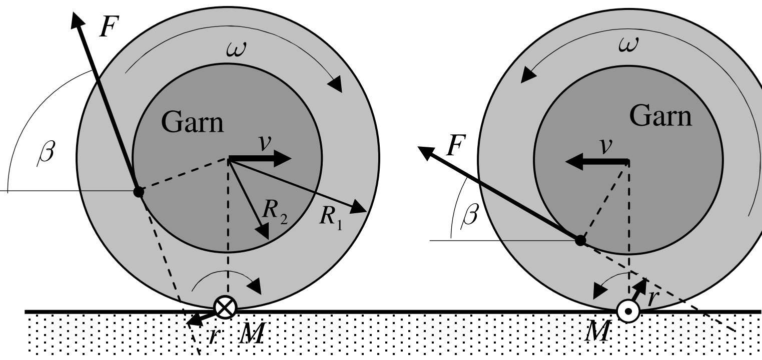
Nur wenn dieser Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit v , Kurvenradius R und Neigungswinkel α erfüllt ist, fährt das Rad sicher durch die Kurve. Rechnung $R = 6{,}4\,m$.

11)Für Radialkraft und Schwerkraft gilt $F_R = \dfrac{mv^2}{r}$ und $F_G = m \cdot g$.



Da $\vec{F}_N \perp$ auf der Unterlage sein muss, ergibt sich $\tan\alpha = F_R / F_G$ $= v^2/(r \cdot g)$. Wir gewinnen hier also auf einfache Weise dasselbe Ergebnis wie bei Aufgabe 8).
Umrechnung der Geschwindigkeit: $v = 50\,m/s$;
$\alpha = 4{,}55°$; $\ddot{U} = 114\,mm$

12) Die Drehung erfolgt um den Auflagepunkt. In der linken Abb. zeigt $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ *ins* Blatt, sodass *Rechts*drehung erfolgt und der Zug ein Wegrollen bewirkt. Der Faden wickelt sich dabei ab.
In der rechten Abb. weist $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ *aus dem* Blatt heraus, sodass eine *Links*drehung erfolgt und der Zug am Faden ein Hinrollen zum Ziehenden bewirkt. Der Faden wickelt sich trotz des Zuges auf.



Der Umschlagwinkel in der Zugsteilheit tritt ein, wenn die Verlängerung der Kraftlinien durch den Drehpunkt läuft. Dann liegt ein rechtwinkliges Dreieck vor mit Hypotenuse R_1 und der Kathete R_2 zum Mittelpunkt. Für den Grenzwinkel gilt $\beta = \arccos(R_2 / R_1) = \underline{\underline{14{,}8°}}$