Roter Faden Physik

Gravitation und Planetenbewegung

mit Aufgaben und Lösungen

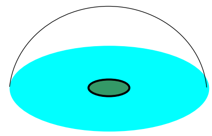
von

Dr. Ortwin Fromm

Evangelische Schule Frohnau, Berlin

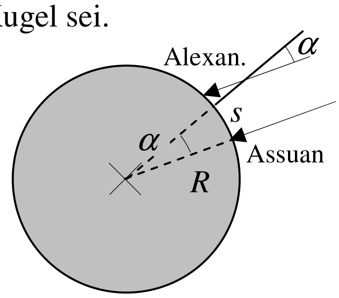
A) Geschichte der Weltbilder.

a) Die Vorstellung der Erde als *flache Scheibe* vertraten schriftlose Völker, sowie die *mesopotamischen* Hochkulturen. Schöpfungsmythen zufolge sei die Erde eine winzige Insel inmitten des Urozeans. Dieses Urbild findet sich auch im Alten Testament der hebräischen Bibel wieder.



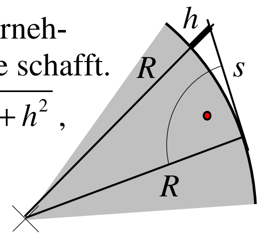
b) Die *griechische* Antike fand schnell Argumente für die Kugelgestalt der Erde.
Argumente der Beobachtung:
1) Bei Mondfinsternis erscheint der Schatten der Erde auf dem Mond, wie auf einer „Projektionsleinwand“, stets rund.
2) Im Süden der Nordhalbkugel stehen die Sterne der Ekliptik höher am Himmel als im N.
3) Ein ankommendes Schiff zeigt als erstes die Mastspitze.

Philosophisch-religiöses Argument:
Wie die Hebräer, so entwickelten auch die *Griechen* einen *Monotheismus*. Dieser war jedoch *philosophischer* Art und entsprang der Vorstellung der *Einheit* von göttlichem Wesen und Natur. Christentum und Islam bereicherten ihr Gottesbild z.T. mit diesen Gedanken der Antike. Im philosophischen Monotheismus gilt das Ideal von Kreis, Kugel und *Mittelpunkt*. Daraus leiteten die Griechen *gedanklich* ab, dass alle Körper zum Mittelpunkt des All-Einen und damit zum Mittelpunkt der Erde streben müssten, weshalb die Erde eine Kugel sei.



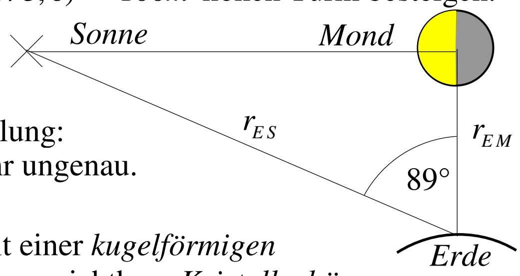
Messung des Erdumfanges durch *Eratosthenes* im 3. Jahrhundert v. Chr.: Assuan in Ägypten liegt etwa auf dem nördlichen Wendekreis, sodass die Sonne zur Sommersonnenwende dort senkrecht am Himmel steht und ein senkrecht aufgestellter Stab *keinen* Schatten wirft. In Alexandria, $s = 800\,km$ nördlicher, wirft ein senkrechter Stab zur selben Zeit jedoch einen Schatten unter ca. 7°.

Daraus ergibt sich: $\dfrac{2\pi \cdot R}{360°} = \dfrac{800\,km}{7°}$ bzw. $R \approx 6548\,km$, - ein hervorragender Wert.



Die folgende Horizontberechnung zeigte den Griechen, wie *klein* der Wahrnehmungsbereich des Menschen ist, so dass erst Denken und Rechnen Abhilfe schafft. Die Entfernung s zum Horizont folgt aus $(R+h)^2 = s^2 + R^2$ zu $s = \sqrt{2Rh + h^2}$, bzw. $s \approx \sqrt{2Rh}$. Mit $R \approx 6400\ km$ erhält man die Weite s in *km* daher nach der Faustformel $s = 3{,}6 \cdot \sqrt{h}$, wobei h in Metern einzusetzen ist.

Beispiele: 1) Für die Augenhöhe $h = 1{,}69\,m$ ist der Horizont wegen $\sqrt{1{,}69} = 1{,}3$ nur $s = 3{,}6 \cdot 1{,}3 \approx 4{,}7\,km$ entfernt. 2) Um die Küstenlinie einer Insel in 36*km* Entfernung über den Horizont schimmern zu sehen, muss ich einen $h = (36/3{,}6)^2 = 100m$ hohen Turm besteigen.



Die Entfernung Erde/Sonne ermittelten die alten Griechen aus der Entfernung Erde/Mond und dem Winkel zwischen Mond und Sonne zur Halbmondstellung: $r_{ES} = r_{EM} / \cos 89° \approx 57 \cdot r_{EM}$. Der Wert war jedoch sehr ungenau.

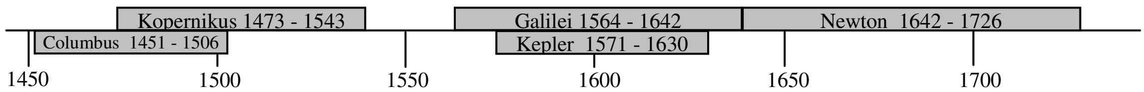
c) Die *Antike* vertrat also ein *geozentrisches Weltbild* mit einer *kugelförmigen* Erde im Zentrum. Mond, Sonne und Planeten seien an unsichtbare *Kristallsphären* geheftet, welche die Erde konzentrisch umgäben und die Himmelskörper bei ihren Drehungen „mitnähmen“. Rätselhaft war nur die zeitweilige Rückwärtsbewegung, welche für die äußeren Planeten, Mars, Jupiter und Saturn am *Nacht*himmel sichtbar ist. Zur Zeit der *Spätantike* löste *Ptolemäus* dieses Problem, indem er jedem Planeten eine weitere rotierende Kristallsphäre, den Epizyklus, zuordnete, dessen Mittelpunkt jeweils auf der Hauptsphäre umläuft, siehe Übungsaufgabe 3). Diese „Konstruktion“ beschrieb die Bewegung der Planeten gut, doch wusste niemand, welche titanischen Kräfte die Himmelssphären halten und drehen.

d) Es ist ein anhaltender Propagandaerfolg der *Aufklärung*szeit gegen das „finstere *Mittelalter*“, dass bis heute viele meinen, dieses hätte wieder an die „flache Erde“ geglaubt (Wikipedia). *Alle* gebildeten Kreise, wie auch die Katholische Kirche, gingen von der Kugelgestalt der Erde aus. Thomas von Aquin (1225–1274), der einflussreichste Kirchenlehrer des Mittelalters, vertrat die kugelförmige Erdgestalt und der Kaiser trug den Reichsapfel und keine Scheibe wie die Pharaonen. Man hatte lediglich Zweifel an der Bewohnbarkeit der „Erdunterseite“ und auch der Stand der Schiffstechnik ließ eine Erdumseglung als hoffnungslos erscheinen. Erst die Sperrung der Seewege nach Indien sowie eine fehlerhafte Neuberechnung des Erdumfanges ermunterten *Columbus* das Abenteuer mit unzureichenden Schiffen zu wagen.

e) In der *frühen Neuzeit* führte *Kopernikus* das *heliozentrische* Weltbild ein und erklärte die Rückwärtsbewegung zum schlichten „Sehproblem“. Auch wenn die Erde dadurch ihre Mittelpunktsstellung einbüßte, so entfielen doch die komplizierten Epizyklen und die Planeten waren wieder an rein *konzentrische* Sphären geheftet. Weil die „Harmonie“ des Himmels dadurch sogar gesteigert war, wurde dieses Weltbild kirchenseits zumindest als Hypothese akzeptiert.

Doch nun folgten drei Schritte, die das alte Weltbild auflösten und ein neues schufen.

1) Mit großer Gewissenhaftigkeit wertete *Johannes Kepler* Messergebnisse von *Tycho Brahe* aus und korrigierte die Kreisbahnen zu minimal *exzentrischen Ellipsen*. Diese, aus heutiger Sicht geringfügige Modifikation, brachte aber das gerade durch Kopernikus wiederhergestellte Ideal von Kugel, Kreis und *Mittelpunkt* zum völligen Einsturz, denn die Sonne steht in einem der *Brennpunkte*, - die Mitte ist leer. Die *leere Mitte* erschütterte aber die antike Vorstellung, welche „Mitte“ und „Gott“ stets zusammen dachte. - Dies ging nun nicht mehr.
2) *Galileo Galilei* betrachtete den Mond durch das gerade erfundene Fernglas und sah, wie dieser *Himmelskörper* mit Bergen, Tälern und „Maren“ der Erde ähnelt. Im Umkehrschluss nahm er dann den Blick der ersten Mondfahrer Armstrong und Aldrin gedanklich vorweg und erkannte, dass die Erde auch „nur“ ein Himmelskörper ist, ein Körper *ohne Einmaligkeit*. Das Band zwischen dem „einmaligen Gott“ und der vormals „einmaligen Erde“ war zerrissen. Die Kirche widersprach mit dem Argument, dass Beobachtungen *keine* Aussagekraft hätten. So *sei* der Abendmahlswein faktisch Jesu *Blut*, auch wenn dies niemand *sieht*.
3) Nach dem geozentrischen Weltbild ist das *Primäre* der Sturz von Himmel und Planeten zum Erdmittelpunkt, welcher durch die göttlichen Himmelsphären verhindert wird.
Das *Trägheitsgesetz* von Galilei dreht den Gedanken vollständig um: Das Primäre ist die tangentiale Flucht des Mondes (bzw. der Planeten) aus der Kreisbahn und die Gravitation der Erde (bzw. der Sonne) hält ihn (bzw. sie) durch ihre Zentripetalwirkung davon ab.
4) Zusammenfassung: Die *Kopernikanische Wende* löste eine Revolution des Denkens aus: Götter verschwinden, die Natur reguliert sich selbst: Gottesbeweise und Glaubenszwang lassen sich nicht aus der Natur begründen.

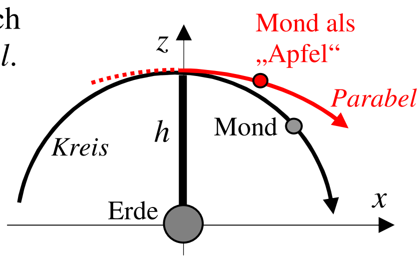


B) Newtons Mondrechnung und das Gravitationsgesetz

Der Legende nach sah *Newton* einen vom Wind *waagerecht* abgerissenen Apfel zu Boden fliegen. Er wusste, dass der Apfel längs einer *Parabel* fliegt und dass diese Flugbahn am *Scheitelpunkt* so rund ist wie ein Kreis. Auf einem Kreis fliegt aber auch der Mond. Newtons Geistesblitz: *Der Mond fliegt wie der Apfel.* In „Mechanik, Fall- und Wurfbewegung“ ergab sich für die

Bahnkurve des waagerechten Wurfes $z(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_x^2} x^2 + h$.

Mit v_x = seitliche Abwurfgeschwindigkeit, h = Abwurfhöhe.



Die Krümmung erhält man durch zweimaliges Ableiten: $z'' = -g / v_x^2$, also $\mathrm{Kr}_{Parabel} = \underline{\underline{-g / v_x^2}}$.

Die Krümmung der Kreisbahn beträgt $\mathrm{Kr}_{Kreis} = \underline{\underline{-1/r}}$, denn Krümmung und Radius sind *anti-proportional* zueinander. Für den Apfel gilt $r = R_E$, denn der Apfel „umkreist" den Erdmittelpunkt auf dem Radius $R_E = 6400\,km$. - Für den Mond gilt $r = R_{EM} = 384\,000\,km$.
Newton betrachtete den Mond als „Apfel". Also setze er die Kreiskrümmung $\mathrm{Kr}_{Kreis} = -1/R_{EM}$ des Mondes mit der Parabelkrümmung $\mathrm{Kr}_{Parabel} = -g/v_x^2$ des Apfels gleich: $-1/R_{EM} = -g/v_x^2$.
Die „seitliche Geschwindigkeit" v_x des Mondes *muss genau* seine Umlaufgeschwindigkeit v sein. Aus $1/R_{EM} = g/v^2$ ergibt sich aber $v = \sqrt{g \cdot R_{EM}} = \sqrt{9{,}81 m/s^2 \cdot 3{,}84 \cdot 10^8 m} = \underline{61\,376\, m/s}$.

Das ist aber total *falsch*, denn die seitliche Geschwindigkeit ist bekannt: Sie ergibt sich einfach aus „*ein* Bahnumfang geteilt durch *einen* Monat". $v = U/T$. $U = 2\pi \cdot R_{EM} = 2\pi \cdot 3{,}84 \cdot 10^8 m$ und $T = 1 Monat = 27{,}3 \cdot 24 \cdot 3600\, s$ ergibt $v = \underline{1023\; m/s}$. Newtons „Apfelmond" ist also $\frac{61\,376}{1023} = 60$ mal *zu schnell*. Woher kommt der riesige Fehler „60"? Newton hatte alle Zahlen im Kopf und so stieß er auf eine andere „60": Der Mond „fliegt" nämlich 60 mal so „hoch" über dem Erdmittelpunkt wie der Apfel, dessen „Höhe" *ein* Erdradius $R_E = 6\,400\,km$ beträgt.
Tatsächlich ergibt $384\,000 / 6400 = 60$. In der Formel $v = \sqrt{g \cdot R_{EM}}$ für die Geschwindigkeit v lässt sich nur der Ortsfaktor g „manipulieren". Um v auf ein 1 / 60 -stel zu drücken, muss der Ortsfaktor aber auf 1 / 3600 -stel schrumpfen, denn er steht unter der Wurzel. Newtons Schlussfolgerung: Der Ortsfaktor ist nicht konstant, er nimmt quadratisch mit dem Abstand r vom Erdmittelpunkt ab. Als Funktion nennt man den Ortsfaktor G und es gilt $G(R_E) = g$.

Der Ortsfaktor nimmt quadratisch ab. Damit $G(R_E) = g$ stimmt, muss gelten : $G(r) = g \cdot R_E^2 \cdot \frac{1}{r^2}$

Die Schwerkraft geht von der Masse aus. Je größer die Masse, desto größer der Schwerkraft. Daraus schloss Newton, dass der Proportionalitätsfaktor $g \cdot R_E^2$ seinerseits zur Erdmasse M_E proportional sein muss. Der neue Proportionalitätsfaktor heißt $\gamma =$ Gravitationskonstante. Mit $g \cdot R_E^2 = \gamma M_E$ folgt $G(r) = \gamma M_E \cdot \frac{1}{r^2}$. Ersetzt man nun in der Formel $F_G = m \cdot g$ den Ortsfaktor g durch das verallgemeinerte G, so folgt $F_G = m \cdot \gamma M_E \frac{1}{r^2}$. In nächsten Schritt werden m und M_E durch M_1 und M_2 ersetzt. Ergebnis: Das *Newtonsche Kraftgesetz* $\boxed{F_G = \gamma \frac{M_1 \cdot M_2}{r^2}}$.

Anmerkungen zum Newtonschen Kraftgesetz der Gravitation:
1) Die Gravitationskraft von M_1 auf M_2 ist anziehend. Abstoßende Gravitation gibt es nicht.
2) F_G ist symmetrisch bzgl. M_1 und M_2. Vertauscht man die Rollen von M_2 und M_1, so zeigt sich, dass das 3. Newtonsche Axiom „Actio = Reactio" erfüllt ist.

Zusammenfassung Kapitel B)
1) *Quadratisches Abstandsgesetz*: Weder Mond, noch Apfel folgen bei ihren Bewegungen dem Trägheitsgesetz. Nach Newton beruht die Abweichung von der gleichförmigen gradlinigen Bewegung beide male auf der Schwerkraft der Erde, ausgedrückt durch den Ortsfaktor. Damit die beobachtete Umlaufzeit des Mondes richtig heraus kommt, muss der Wert des Ortsfaktors, der am Erdboden g beträgt, *quadratisch* mit der Entfernung vom Erdmittelpunkt abnehmen.
2) *Kraftgesetz der Gravitation*: Das Kraftgesetzt erfüllt auch 3. Newtonsche Axiom: Rollentausch zeigt: Der Apfel zieht die Erde genauso stark an, wie diese ihn. Die gegenseitige Anziehungskraft ist proportional zum *Produkt* der Massen. Sind weitere Massen im Spiel, so überlagern sich die paarweisen Anziehungen additiv. Eine „Triowirkung" usw. ist nicht bekannt.

C) Das Gravitationsfeld

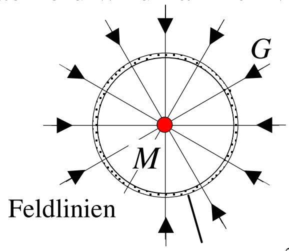
Newton wusste nicht, *wie* die Anziehungskraft die Distanzen überbrückt. Er sah sich genötigt eine unmittelbare (unendlich schnelle) *Fernwirkung* anzunehmen. Heute weiß man, dass Änderungen der Gravitation auch „nur“ mit *Lichtgeschwindigkeit* übertragen werden. Kürzlich wurden sogar Gravitationswellen entdeckt, welche Gravitationsänderungen über kosmische Entfernungen durch den Weltraum übertragen. Die Messung wurde mit dem Nobelpreis geehrt.

Nach heutiger Vorstellung ist der Zwischenraum von Gravitation erzeugender Masse M_1 und der Gravitation erfahrender Masse M_2 mit einer vermittelnden Substanz ausgefüllt, nämlich dem *Gravitationsfeld*. Wie kommt man darauf, dass die Gravitation, dass etwas zwischen den beiden Massen existiert?

Gemäß der Kraftformel $F_G = \gamma M_1 \cdot M_2 / r^2$ ist F_G gleich null, wenn M_2 null ist. Aber ist die Gravitation tatsächlich „weg“, wenn keine Gravitation erfahrenden Masse M_2 vorhanden ist? Zur Beantwortung setzen wir M_2 nicht schlagartig null, sondern lassen es langsam kleiner werden. Dann wird auch F_G kleiner. Doch das Verhältnis von F_G zu M_2 bleibt stets auf dem Wert $F_G / M_2 = \gamma M_1 / r^2$ stehen. Das Verhältnis ist überhaupt nicht von M_2 abhängig. Es behält seinen Wert selbst dann, wenn M_2 im *Limes* gegen null geschickt wird. Das heißt: Auch ohne die Gravitation erfahrenden Masse M_2 ist der ganze Raum durch den Term $\gamma M_1 / r^2$ „erfüllt“, welcher *nur* von der felderzeugenden Masse M_1 abhängt. Den Term $\gamma M / r^2$ nennt man *Feldstärke* des *Gravitationsfeldes* von M. Der Buchstabe dafür ist G. Allg. gilt $\boxed{G = \dfrac{\gamma M}{r^2}}$.

Ein Vergleich zeigt, dass der von Newton ermittelte Ortsfaktor G nichts anderes war, als die Feldstärke G, welche die Masse der Erde auf „Mondhöhe“ erzeugt. Auch ist der berühmte Ortsfaktor $g = 9{,}81 m/s^2$ nichts anderes, als die Gravitationsfeldstärke G in Bodennähe.

Newton wurde er gefragt, warum es exakt r^2 und nicht etwa $r^{2{,}001}$ heißt. Er konnte das nicht beantworten, denn die Erklärung folgt erst aus der Feldvorstellung. Das Feld wird nämlich von *Feldlinien* durchlaufen. Die Feldstärke entspricht der Liniendichte. Eine kugel- oder punktförmige Masse erzeugt radial, bis ins Unendliche laufende Feldlinien. Da Gravitationfeldlinien *nur* von *Massen* erzeugt werden und einmal vorhandene *nicht wieder verschwinden* können, müssen sie von ihren Erzeugungspunkt aus immer größere Kugeloberfläche durchstoßen. Da die Kugeloberfläche aber gemäß $A_O = 4\pi \cdot r^2$ wächst, nimmt die Feldstärke gemäß $1/r^2$ ab.



Kugeloberfläche $A_O = 4\pi \cdot r^2$

Zusammenfassung Kapitel C)
1) *Existenz*: Das Feld erfüllt den ganzen Raum. Eine Limesbetrachtung zeigt, dass das Feld auch ohne Nachweis existiert. Die Feldstärke ist proportional zur Größe der felderzeugenden Masse.
2) *Ortsfaktor*: Der Ortsfaktor g in Bodennähe, bzw. a in größerer Entfernung **ist** die Feldstärke.
3) *Abstandsgesetz*: Die quadratische Abnahme der Feldstärke einer Punktmasse beruht nicht auf einer Abschwächung, sondern nur auf der Anforderung, größere Kugeloberflächen zu durchdringen.

D) Die Gravitationswaage und die Gravitationskonstante γ.

Der Faktor $g \cdot R_E^2$ in B) beruht allein auf Daten der Erde, weshalb er proportional zur Erdmasse M_E sein muss. Es gilt $g \cdot R_E^2 = \gamma M_E$, mit γ als Propfaktor. γ heißt *Gravitationskonstante*. Wie groß ist γ? Eine erste Rechnung ging von $\gamma = g \cdot R_E^2 / M_E$ aus. Aber wie schwer ist die Erde? Das zugängliche *Oberflächen*gesteine hat etwas die Dichte $\rho \approx 3000 kg/m^3$.

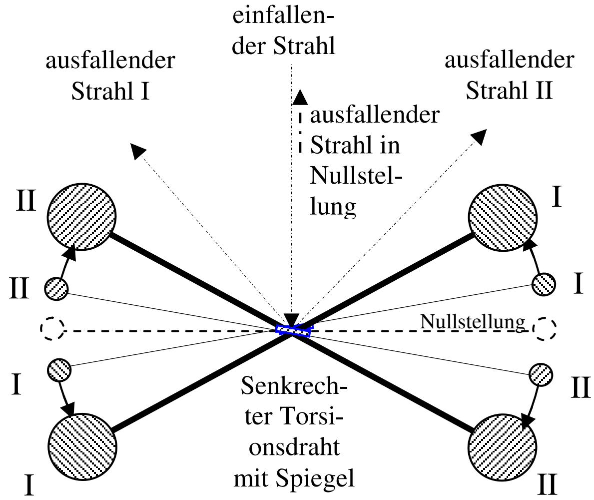
Dadurch ergab sich $\gamma = \dfrac{g \cdot R_E^2}{M_E} = \dfrac{g \cdot R_E^2}{V \cdot \rho} = \dfrac{3 \cdot g \cdot R_E^2}{4 \cdot \pi R_E^3 \cdot \rho} = \dfrac{3 \cdot g}{4 \cdot \pi R_E \cdot \rho} \approx 1{,}2 \cdot 10^{-10} \dfrac{m^3}{kg \cdot s^2}$.

Dieser Wert ist *sehr ungenau*, denn die Beschaffenheit des Erdinneren war unbekannt.
Es gelang dem Engländer *Cavendish* 1797 mit seinem bedeutenden *Drehwaage-Experiment* den γ-Wert präzise zu ermitteln ohne auf die Erdmasse zurückzugreifen. Durch Formelumstellung hat er im Gegenteil dann sogar „die Erde im Labor gewogen". Eine waagerecht stehende Hantel mit zwei großen Bleimassen lässt sich um den Mittelpunkt in den Stellungen I und II arretieren. Eine weitere Hantel mit zwei kleinen Bleimassen ist an einem Torsionsdraht beweglich aufgehängt. Je nach Stellung der großen Kugeln verdrillt sich der Draht der kleinen Kugeln in eine gewisse Winkelstellung, denn die feststehenden großen Kugeln ziehen die beweglichen kleinen Kugeln in ihre Richtung. Über einen aufgeklebten Spiegel wird die Verdrillung per Lichtstrahl angezeigt. Die quantitative Auswertung liefert Cavendish den Wert der Gravitationskonstanten

$$\boxed{\gamma = 6{,}673 \cdot 10^{-11}\ m^3 / kg \cdot s^2}$$

Mit diesem genaueren Wert ergab sich aus der Formel $g \cdot R_E^2 = \gamma \cdot M_E$ die Erdmasse

$$M_E = \frac{g \cdot R_E^2}{\gamma} = 5{,}97 \cdot 10^{24} kg\ .$$

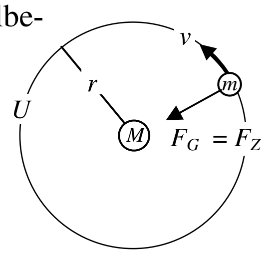


So hat Cavendish „die Erde im Labor gewogen".

Zusammenfassung Kapitel D)
1) *Messung der Gravitationskonstante*: Ihr Wert wurde durch Anziehiehungskraft zweier Massen im Labor ermittelt. Die geringe Kraft erforderte die *erste Präzisionsmessung* der Physikgeschichte.
2) *Wert*: Der Wert von γ ist winzig. Zwei $1kg$ Massen in $1m$ Abstand ziehen sich nur mit $67\ pN$ an.
3) *Erdmasse*: Die Messung von γ im Labor ermöglichte die exakte Berechnung der Erdmasse.

E) Bewegung eines kleinen Körpers *m* auf einer *Kreisbahn* um einen Zentralkörper *M*.

Um eine Masse m von der *gleichförmig gradlinigen* Bewegung in eine Kreisbewegung zu zwingen, ist somit eine *Kraft* erforderlich, welche die Zentripetalbedingung $F_Z = mv^2 / r$ erfüllt. Die Gravitation einer Punktmasse leistet dies.



Diese Überlegungen werden hier angewendet auf …
a) die Bewegung des Mondes m um die Erde M,
b) die Bewegung eines künstlichen Satelliten m um die Erde M,
c) die Bewegung der Planeten m um die Sonne M.

1) In die Bahnberechnung gehen die drei Größen (Bahnparameter) r, v und T ein.
Gegeben ist jeweils *eine* der drei Größen, die anderen *beiden* lassen sich dann berechnen. Das gelingt, weil es *zwei* Beziehungen (Formeln) gibt, welche die drei Größen verbinden.

I) Die Gravitationskraft $F_G = \gamma \frac{mM}{r^2}$ fungiert als Zentripetalkraft $F_Z = \frac{mv^2}{r}$.

Aus $mv^2 / r = \gamma mM / r^2$ folgt dann $\boxed{v^2 r = \gamma M}$ Formel (I)

II) Für die Bahngeschwindigkeit gilt $v = U / T = 2\pi r / T \Rightarrow \boxed{v = 2\pi r / T}$ Formel (II)

Beispielaufgaben mit: $R_E = 6{,}37 \cdot 10^6 m$, $\gamma = 6{,}673 \cdot 10^{-11}\ m^3 / kg \cdot s^2$, $M_E = 5{,}97 \cdot 10^{24} kg$

a) Gegeben.: r Gesucht: v und T.

Lösung: $v^2 r = \gamma M$ nach v^2 umstellen: $v^2 = \gamma M / r$. Dann $\sqrt{...}$ ziehen.
Nun r und v in $v = 2\pi r / T$ einsetzen und nach T umstellen.

Beispiel: Erdsatellit in $h = 200km$ Höhe. Erg.: $r = 6570 km$; $v = 7787 m/s$; $T = 5300 s$

b) Gegeben: v Gesucht: r und T.

Lösung: $v^2 r = \gamma M$ nach r umstellen: $r = \gamma M / v^2$

Nun r und v in $v = 2\pi r / T$ einsetzen und nach T umstellen.

Beispiel: Erdsatellit mit $v = 7000\,m/s$. Erg.: $r = 8130\,km$; $h = 1771\,km$; $T = 7298\,s$

c) Gegeben: T Gesucht: v und r.

Lösung: $r = \dfrac{\gamma M}{v^2}$ in $v = \dfrac{2\pi r}{T}$ einsetzen ergibt $v^3 = \dfrac{2\pi \cdot \gamma M}{T}$. Dann $\sqrt[3]{...}$ ziehen.

Nun T und v in $v = 2\pi r / T$ einsetzen und nach r umstellen.

Beispiel: Erdsatellit mit $T = 5500\,s$. Erg.: $v = 7692\,m/s$; $r = 6733\,km$; $h = 363{,}2\,km$

d) Anmerkung: Eliminieren von v aus Formel (I) $v^2 r = \gamma M$ und Formel (II) $v = 2\pi r / T$:

Quadrieren von (II) ergibt $v^2 = \dfrac{4\pi^2 r^2}{T^2}$. Einsetzen in (I): $\dfrac{4\pi^2 r^2}{T^2} \cdot r = \gamma M$ ergibt

$\dfrac{4\pi^2 r^2}{T^2} \cdot r = \gamma M$. Umstellen: $\boxed{T^2 = \dfrac{4\pi^2}{\gamma M} \cdot r^3}$.

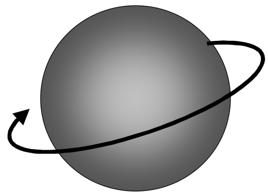
Hat man zwei Planeten P_1 und P_2, welche *dasselbe* Zentralgestirn der Masse M auf unterschiedlichen Bahnen umlaufen, so gilt $T_1^2 = \dfrac{4\pi^2}{\gamma M} \cdot r_1^3$ und $T_2^2 = \dfrac{4\pi^2}{\gamma M} \cdot r_2^3$.

Division dieser Gleichungen ergibt $\dfrac{T_1^2}{T_2^2} = \dfrac{r_1^3}{r_1^3}$ bzw. $\boxed{\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^3}$. $\boxed{\text{3. Kepler-Gesetz}}$

Das 3. Kepler-Gesetz besagt für zwei Planeten, welche dasselbe Zentralgestirn auf *Kreisbahnen* umlaufen, dass das Quadrat des Verhältnisses der Umlaufzeiten gleich der 3. Potenz des Verhältnisses der Bahnradien ist.

Diese Gesetzmäßigkeit hat Kepler durch Beobachtung für *elliptische Bahnen* gefunden. Für elliptische Bahnen sind die Radien dann durch die großen Halbachsen zu ersetzen.

2) Kreisförmige Satellitenbahnen



Satelliten umlaufen *stets* den Erd*mittelpunk*t in Höhen *oberhalb* der Atmosphäre. Je kleiner der Radius r, desto kleiner die Umlaufzeit. Ohne Berge und Atmosphäre könnte ein Satellit die Erdkugel in ca. null Meter Höhe umkreisen. Die Umlaufzeit betrüge dann $T = \sqrt{4\pi^2 R_E^3 / \gamma M_E} = 5067\,s \approx 84\,\text{min}$. Alle 84 Minuten flöge der Satellit vorüber.

Ein Körper, welcher die Erde in einem fiktiven Bohrloch durchschwingt, benötigt interessanterweise die gleiche Zeit als Schwingungsdauer. Niedrigen Parkbahnen, die auch für die Kartographie genutzt werden, verlaufen in ca. 200 *km* Höhe. Die Umlaufzeiten beträgt dann weniger als 90 Minuten. Die ISS hat ca. 350 *km* Höhe und läuft in 91 Minuten um. Kommunikationssatelliten laufen in einigen tausend Kilometern Höhe um. Satelliten sieht man nur früh morgens und am frühen Abend. Warum?

Zusammenfassung Kapitel E)

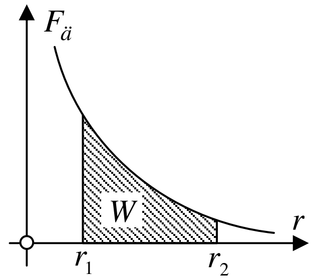
1) *Kreisbahn*: Die Kreisbahn wird zwar gleichförmig, aber nicht gradlinig durchlaufen. Deshalb ist eine Kraft erforderlich, die Zentripetalkraft. Die Gravitaton eine „Punktmasse“ erfüllt die Bedingung.
2) *Parameter*: Es gibt die *drei* Bahnparameter: Radius, Umlaufgeschwindigkeit und Umlaufdauer.
3) *Beziehungen*: Zwischen den drei Bahnparametern bestehen *zwei* Beziehungen, sodass nur *ein* Parameter bekannt sein muss. Die anderen beiden lassen sich dann berechnen.

F) Arbeit und Energie einer Masse m im Gravitationsfeld der Masse M.

1) Hubarbeit W

Im „Roten Faden Physik, Mechanik“ haben wir gelernt, dass zum Heben einer Masse m um die Hubhöhe h (in Erdbodennähe) die Arbeit $W = g\,m\,h$ zu verrichten ist.

Jetzt soll die Masse m aber nicht nur um wenige Meter, sondern um viele hundert oder gar tausend Kilometer *senkrecht* empor geschossen bzw. gehoben werden. Damit gerät m aus dem Bereich des (nahezu) konstanten Ortsfaktors g ,der in Bodennähe gilt, heraus. D.h., die Hubarbeit ist gegen den *variablen* Ortsfaktor $a(r) = \gamma M \;/\; r^2$ zu verrichten. Im Abstand r vom Erdmittelpunkt ist daher die äußere Kraft $F_ä = \gamma m M \;/\; r^2$ aufzubringen, um die Masse m kräftefrei zu bewegen. Die Hubarbeit gewinnen wir wieder als Flächeninhalt des zugehörigen Arbeitsdiagrammes. Im 2. KHJ lernt man, dass ein Flächeninhalt durch *Integration* berechnet wird. Die Integralrechnunug ist die Umkehrung der Differentialrechnung.



Arbeitsdiagramm

Wir zeigen as Integrieren zunächst am Beispiel der Funktion $f(x) = 1/x^2 = x^{-2}$:

Zum Integrieren von $f(x)$ muss eine sogenannte Stammfunktion $F(x)$ gefunden werden, sodass $F'(x) = f(x)$ gilt. Da Ableiten den Exponenten um 1 erniedrigt, muss $F(x)$ die Form $F(x) = k \cdot x^{-1}$ mit noch unbekanntem *k*. Ableiten des Ansatzes ergibt $F'(x) = -1 \cdot k \cdot x^{-2}$. Damit muss $k = -1$ gelten und das Ergebnis der Integration lautet $F(x) = -x^{-1} = -1/x$. Der Flächeninhalt unter der Kurve $f(x) = 1/x^2$ zwischen den Werten x_1 und x_2 ergibt sich dann durch die Formel $A = F(x_2) - F(x_1) = -1/x_2 - (-1/x_1) = 1/x_1 - 1/x_2$.

Übertragen auf das Arbeitsdiagramm heißt das: $$\boxed{W_{r_1 \to r_2} = \gamma m M \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}$$

Beispiel 1) Um eine Rakete der Masse $m = 1000\,kg$ von der Erdoberfläche mit $r = R_E =$ $6370\,km$ auf die Höhe $h = 200\,km$, also auf den Mittelpunktsabstand $R = 6570\,km$ zu heben, muss man $W = 1{,}9 \cdot 10^9\,J = 1{,}9\,GJ$ Arbeit verrichten.

Beispiel 2) Um die Masse $m = 1000\,kg$ von der Erdoberfläche mit $r = R_E = 6370000\,m$ auf die Höhe $h = 1\,m$, also auf den Mittelpunktsabstand $R = 6370001\,m$ zu heben, muss man $W = 9{,}81\,kJ$ Arbeit verrichten. Das ergibt sich auch mit $W = g\,m\,h$.

2) Potentielle Energie W_{pot} einer Masse m im Gravitationsfeld der Masse M.

Allgemein gilt: Verrichtete Arbeit wird zu potentieller Energie. Aber wo fängt die Verrichtung an? Wenn ein Buch auf dem Erdboden liegt, so würde man ihm die potentielle Energie $W_{pot} = 0$ zuschreiben, weil es ja noch nicht angehoben wurde. Aber vielleicht wurde es am Vortag aus dem Kellermagazin empor getragen. Kurzum, eine allgemeine Formel für die potentielle Energie eines Körpers erfordert eine *Bezugshöhe*, für welche $W_{pot} = 0$ gelten soll. Weder der Erdboden noch das Kellerniveau ist sinnvoll, beide sind *relativ*. Gibt es überhaupt etwas *Absolutes*? Für ein homogenes Feld, welches sich mit konstantem Ortsfaktor *g* über den gesamten Raum erstreckt, gibt es das *nicht*, wohl aber für ein Schwerefeld, dessen Ortsfaktor gemäß $a(r) = \gamma M \;/\; r^2$ mit zunehmendem r abnimmt und im Unendlichen verschwindet. Diesen *Nullwert im Unendlichen* nutzt man zur Festlegung des Bezugsniveaus. Um z.B. die potentielle Energie der Masse m auf dem Erdboden zu ermitteln, überführen wir *m* gedanklich von $r_1 = \infty$ nach $r_2 = R_E$. Die zu „verrichtende“ Arbeit ist dann *negativ*, es gilt $W_{\infty \to R_E} = \gamma m M_E \cdot \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R_E} \right) = \gamma m M_E \cdot \left(0 - \frac{1}{R_E} \right) = -\frac{\gamma m M_E}{R_E}$.

Für $m = 1 kg$ gilt dann auf dem Erdboden $W_{pot,0} = -\gamma m M_E / R_E = -62539733{,}124\,J$

und in *ein* Meter Höhe $W_{pot,1} = -\gamma m M_E / (R_E + 1m) = -62539723{,}306\,J$.

Die Differenz $W_{pot,1} - W_{pot,0} = 9{,}81\,J$ ist dann wieder die übliche Hubarbeit.

Allgemein haben wir somit die Generalformel für die potentielle Energie einer Masse *m* im Gravitationsfeld der punktförmigen Masse *M*: $\boxed{W_{pot} = -\frac{\gamma m M}{r}}$.

<u>Bemerkung zum „Minuszeichen“:</u> Solange m eine endliche Entfernung r zu M hat, kann m die Zentralmasse *M* umkreisen und ist insofern an *M gebunden*. *m* sitzt also im „Keller“ von *M*. Das Minuszeichen seiner potentiellen Energie ist somit anschaulich verständlich

3) <u>Kinetische Energie einer Masse *m* auf einer Kreisbahn um die Masse *M*.</u>

Für die kinetische Energie gilt allgemein $W_{kin} = ½ \cdot m v^2$.

Dadurch, dass die Gravitationskraft $F_G = \gamma m M / r^2$ auf der Kreisbahn jedoch als Zentripetalkraft $F_Z = m v^2 / r$ fungiert, also $v^2 = \gamma M / r$ gilt, sind *v* und r nicht mehr unabhängig.

Setzt man $v^2 = \gamma M / r$ in $W_{kin} = ½ \cdot m v^2$ ein, so erhält man für die kinetische Energie eine Formel, die *scheinbar* garnicht mehr von *v* abhängt: $\boxed{W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma m M}{r}}$.

→ Sowohl W_{pot}, als auch W_{kin} enthalten den Term $\gamma m M / r$. Damit gilt $\boxed{W_{pot} = -2 \cdot W_{kin}}$

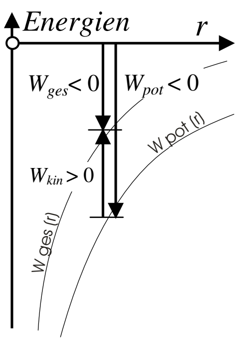
4) <u>Gesamtenergie einer Masse *m* auf einer Kreisbahn um die Masse *M*.</u>

Für die Gesamtenergie gilt bekanntlich $W_{Ges} = W_{kin} + W_{pot}$.

Wegen $W_{pot} = -2 \cdot W_{kin}$ folgt $\boxed{W_{Ges} = -W_{pot}}$. Also $\boxed{W_{Ges} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma m M}{r}}$.

<u>Bemerkung:</u> Die Beziehungen zwischen W_{pot}, W_{kin} und W_{Ges} heißen „**<u>Virialsatz</u>**“

5) <u>Anmerkungen:</u>



a) W_{kin} ist zwar *positiv* (muss es wegen v^2 sein). Da aber W_{pot} exakt doppelt so groß <u>und</u> *negativ* ist, ist auch die Gesamtenergie W_{Ges} auf allen Kreisbahnen *negativ*.

b) Auf der Kreisbahn sind W_{kin} und W_{Ges} dem Betrage nach gleich groß. Aber während $W_{kin} > 0$ gilt, ist $W_{Ges} < 0$.

c) Kann W_{Ges} überhaupt positiv sein? Antwort: **Ja**. W_{Ges} ist dann positiv, wenn die Masse *m* bereits aus dem Unendlichen mit einer Geschwindigkeit herbei fliegt. Für manche Kometen ist das der Fall. Doch diese Kometen durchlaufen eine *Hyperbelbahn* und keine *Kreisbahn*.

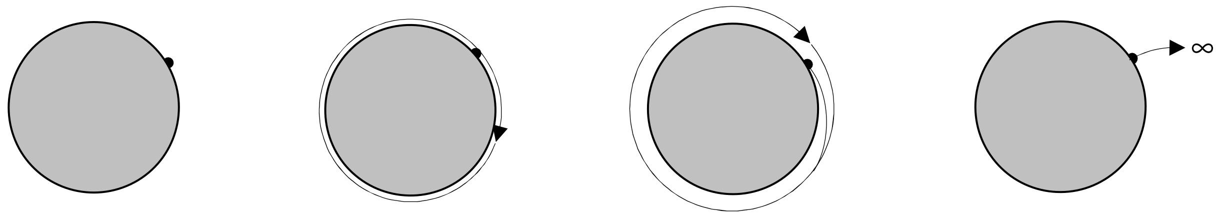
Zusammenfassung Kapitel F)

1) *Hubarbeit*: Die Hubarbeit gewinnt man aus dem *Arbeitsdiagramm* mit *abnehmende* Ortsfaktor.
2) *Potentielle Energie*: *Bezugsniveau*. Für die Bewegung im Feld einer Punktmasse bietet sich auf natürliche Weise der Abstand $r = \infty$ als Bezugsniveau an. Damit wird W_{pot} für *alle* $r < \infty$ *negativ*.
3) *Kinetische Energie*: $W_{kin} > 0$. Auf der Kreisbahn wird *v* durch *r* ersetzt. W_{kin} ist deshalb *immer* halb so groß wie W_{pot}, allerdings mit umgekehrtem Vorzeichen.
4) *Gesamtenergie*: Die *Bedingung* für W_{kin} überträgt sich auf W_{Ges}: $W_{Ges} = -\ W_{kin}$.
5) *Virialsatz*: Die Beziehungen zwischen W_{pot}, W_{kin} und W_{Ges} auf der Kreisbahn heißen „Virialsatz“
6) *Vorzeichen von* W_{Ges}: Für $W_{Ges} < 0$ befindet sich m in einem an M *gebunden* Zustand und durchläuft eine Kreis- oder Ellipsenbahn.

G) Startgeschwindigkeit von Raketen von der Erdoberfläche aus.

Eine senkrecht oder schräg abgeschossene Gewehrkugel fällt auf die Erdoberfläche zurück. Eine militärische Rakete überfliegt einen gewissen Kreisbogen der Erdkugel und schlägt dann wieder auf. Die notwendige Startgeschwindigkeit für ein Orbit liefert die Energiebilanz:

Rakete auf Startrampe:	Minimales Orbit:	Orbit auf Radius r :	„Orbit“ mit $r=\infty$:
$W_{kin}=0$	Flugbahn in „null“ Metern Höhe: $W_{kin}=\gamma m M/2R_E$	$W_{kin}=\gamma m M/2r$ $W_{pot}=-\gamma m M/r$	Zentripedalkraft = 0 , Geschwindigkeit = 0 , $W_{pot}=0$



W_{kin}	W_{pot}
0	$-\dfrac{\gamma m M_E}{R_E}$

W_{kin}	W_{pot}
$\dfrac{1}{2}\dfrac{\gamma m M}{R_E}$	bleibt

Es fehlt $\dfrac{1}{2}\dfrac{\gamma m M}{R_E}$

W_{kin}	W_{pot}
$\dfrac{1}{2}\dfrac{\gamma m M}{r}$	$-\dfrac{\gamma m M}{r}$

Es fehlt $-\dfrac{\gamma mM}{2r}+\dfrac{\gamma mM}{R_E}$

W_{kin}	W_{pot}
0	0

Es fehlt $\dfrac{\gamma mM}{R_E}$

Die Startgeschwindigkeiten ergeben sich aus der Forderung	1. kosmische Geschw.	Beliebiges Orbit	2. kosmische Geschw.
$\dfrac{1}{2}\cdot m v_S^2=\Delta W$	$v_1=\sqrt{\dfrac{\gamma M_E}{R_E}}$	$v_S=\sqrt{2\gamma M_E\cdot\left(\dfrac{1}{R_E}-\dfrac{1}{2r}\right)}$	$v_2=\sqrt{\dfrac{2\cdot\gamma M_E}{R_E}}$

Spezialfälle: Kosmische Geschwindigkeiten

1) Erste kosmische Geschwindigkeit heißt diejenige *Start*geschwindigkeit, welche die Rakete in das „Minimale Orbit“ in „gedachten“ *null* Metern Höhe schießt.
   Für die *Erde* gilt $v_1\approx \underline{\underline{28080\ km/h}}$.

   Zweite kosmische Geschwindigkeit heißt diejenige Startgeschwindigkeit, welche die Rakete ins Unendliche befördert. Man sieht: $\boxed{v_{2.}=\sqrt{2}\cdot v_1}$
   Für die *Erde* gilt $v_2\approx \underline{\underline{40320\ km/h}}$

Zusammenfassung Kapitel G)

1) *Erdboden*: Steht eine Rakete am Erdboden, so ist W_{kin} gleich *null* und es gilt $W_{pot}=-\gamma m M/r$. Der Virialsatz zwischen W_{pot} , W_{kin} und W_{Ges} gilt am Boden also *nicht*.
2) *Erste kosmische Geschwindugkeit*: Sie bringt die Rakete vom Boden auf die niedrigst mögliche Kreisbahn in „null“ Metern Höhe. Auf *jeder* Kreisbahn muss der Virialsatz zwischen W_{pot} , W_{kin} und W_{Ges} gelten. Daher muss W_{kin} vom Wert null auf den Wert $W_{kin}=-½\ W_{pot}$ gebracht werden. Diese Energie wird durch einen Startschuss mit der 1. kosmischen Geschwindigkeit aufgebracht.
3) *Zweite kosmische Geschwindigkeit*: Sie bringt die Rakete vom Boden in das Unendliche. Dazu muss genau doppelt soviel Startenergie bereitgestellt werden, wie für das minimale Orbit erforderlich ist. $v_{2.}$ muss daher um den Faktor $\sqrt{2}$ größer sein als v_{1} .
4) *Änderung des Bahnradius*: Die Differenz der jeweiligen Gesamtenergieen liefert die erforderlich Abschussgeschwindigkeit zur Bahnänderung.

H) Geostationäre Bahn der Erde

Forderung: Umlaufzeit $T = 24 \cdot 3600\,s = 86\,400\,s$.

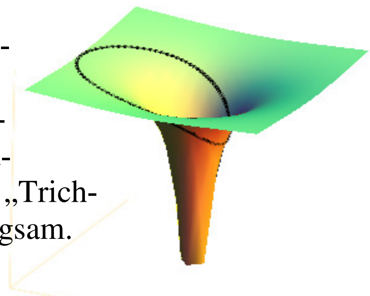
Aus $r^3_{geost} = \dfrac{\gamma M_E T^2}{4\pi^2}$ folgt $r_{geost} = \sqrt[3]{\dfrac{\gamma M_E T^2}{4\pi^2}} = \underline{\underline{42{,}242 \cdot 10^6\,m}} = \underline{\underline{42\,242\,km}}$

Flughöhe über der Erde $h_{geost} = r_{geost} - R_E = \underline{\underline{35{,}871 \cdot 10^6\,m}} = \underline{\underline{35\,871\,km}}$.

Die „echte“ geostationäre Bahn umläuft die Erde über dem Äquator. Relativ zu einem Ort auf dem Äquator steht der Satellit dann tatsächlich still. Umkreist der Satellit den Erdmittelpunkt in „geostationärer Höhe“ auf einer nichtäquatorialen Kreisbahn, so schwingt er, relativ zur rotierenden Erde, in Form einer „Acht“ zwischen Nord und Süd hin und her.

I) Bewegung eines Planeten oder Satelliten auf einer elliptischen Bahn.

1) Die elliptische Bahn im Potentialtopf.

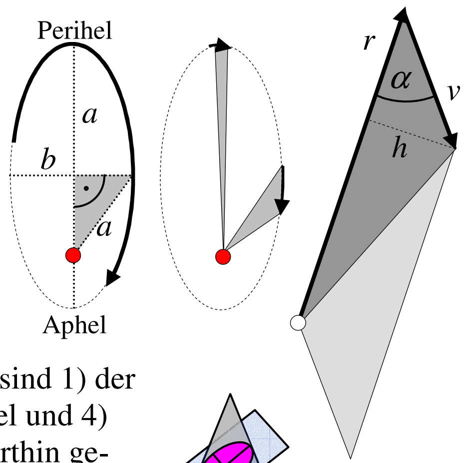


Wirft man eine Münze schräg in einen Geldspendetrichter, so würde sie bei Reibungsfreiheit von oben gesehen auf einer Ellipsenbahn umlaufen. Das Trichterloch umläuft sie mit hoher Geschwindigkeit. Am Rand wir sie langsam. Bei der Planetenbahn ist es entsprechend: Die Sonne steht in einem der Ellipsenbrennpunkte, im „Trichterloch“. Den *Aphel* durchläuft der Planet schnell, den *Perihel* langsam.

2) Die Gesetze der Ellipsenbahn.

Kepler deutete die hoch präzisen Planetendaten von *Tycho Brahe* und fand das ..

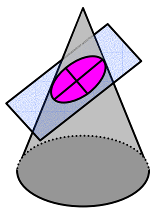
1. **Kepler-Gesetz**: Jeder Planet durchläuft eine (minimale) Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
2. **Kepler-Gesetz:** Der von der Sonne zum Planeten gezogene *Leitstrahl* überstreicht in einer raumfesten Ebene in gleichen Zeiten gleich große Flächen. (Keplersche Flächensatz)
3. **Kepler-Gesetz:** Für zwei Planeten gilt $(T_1/T_2)^2 = (a_1/a_2)^3$. $a_{1,2}$ sind dabei die großen Halbachsen der Ellipsen.(siehe Abb.).



Der *Flächensatz* beruht auf dem *Drehimpulserhaltungssatz*, den Kepler noch nicht kannte. Der Betrag des Drehimpulses ist das Produkt von Hebelarm r, Geschwindigkeit v und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels: $L = r \cdot v \cdot \sin\alpha$. Da aber $v \cdot \sin\alpha = h$ die Höhe des nebenstehenden Parallelogramms mit der Grundseite r ist, entspricht der Flächeninhalt des Parallelogramms dem Betrag des Drehimpulses *L*.

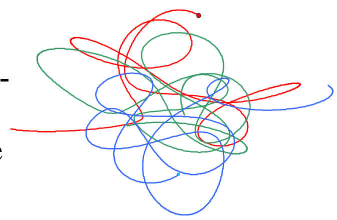
3) Überblick: Mögliche Bahnen, Kegelschnitte

Die möglichen Bahnen einer Masse *m* um die Masse *M* sind 1) der Kreis 2) die Ellipse 3) die ins Unendlich gehende Parabel und 4) die asymptotisch aus dem Unendlich kommende und dorthin gehende Hyperbel. Interessanterweise erhält man alle diese Kurven durch geeignetes Schneiden eines Kegels mit einer Ebene. Im ersten und zweiten Fall ist die Gesamtenergie der Masse m negativ. Im dritten Fall ist sie null. Im vierten Fall ist sie positiv.



Dieser Kegelschnitt liefert eine Ellipse.

J) Sonnensystem, Dreikörperproblem



Bewegen sich z.B. *drei* Körper unter dem Einfluss der Gravitation, so entstehen im Allgemeinen chaotische Verhältnisse. Kleinste Bahnänderungen bewirken mitunter völlig unterschiedliche zukünftige Verläufe (Schmetterlingseffekt). In unserem Sonnensystem beinhaltet die Sonne jedoch 99,86% der Gesamtmasse. Daher sind die Planeten vergleichs-

weise „masselos“ und beeinflussen sich kaum. Sobald die Umlaufzeiten jedoch in einem niedrigen rationalen Verhältnis stehen, kommt es zu *Resonanzen*. Bahnstörungen schaukeln sich auf und Planeten stürzen in die Sonne oder werden aus dem System geschleudert. Auf diese Weise wurde in der Frühgeschichte des Sonnensystems mächtig „aufgeräumt“.
Interessant für die Raumfahrt ist, wie sich ein kleiner dritter Körper (Satellit) im Bereich zweier sich umkreisenden Körpern (z.B. Erde und Sonne) benimmt. Der franzosische Mathematiker Lagrange hat *fünf* Punkte im rotierenden System errechnet, an welchen sich die Kraftsumme für den Satelliten zu null addiert. Die Punkte heißen *Lagrange-Punkte* bzw. *Librationspunkte*, sie rotieren synchron mit der Erde um die Sonne. Eigentlich würde man nur *einen* kräftefreien Punkt zwischen Erde und Sonne (bei L_1) vermuten, an welchem sich die Anziehungskräfte von Sonne und Erde *direkt* aufheben. Aber ähnlich der Gezeitenwelle auf der mond*abgewandten* Seite der Erde im System Erde-Mond, gibt es noch L_2 und L_3, an deren aufgrund der Zentrifugalkraft ebenfalls Kräftefreiheit herrscht. Alle drei Punkte L_1, L_2 und L_3 rotieren auf der Verbindungsgerade durch Erde und Sonne. Der Aufenthalt an diesen drei Punkte ist jeweils *instabil*. Weltraumraumschrott driftet langsam aus ihnen heraus. Ein Satellit hingegen kann hier, mit minimalem Korrekturaufwand, seine Position *stabilisieren*. In L_1 sind Forschungssatelliten zur Sonnenbeobachtung positioniert. In L_2 hat man Abschattung, so dass von dort aus die vom Urknall herrührende kosmische Hintergrundstrahlung beobachtet werden kann. In L_3 hat die Science-Fiction-Literatur eine „Gegenerde“ vermutet, die für uns stets hinter der Sonne verbleibt, was aber mit der Instabilität nicht verträglich wäre. Die Punkte L_4 und L_5 sind hingegen *stabil*. Sonne-Erde-L_4 bzw. Sonne-Erde-L_5 bilden ein gleichseitiges Dreieck. L_4 und L_5 werden umkreist von Weltraumstaub und Kleinasteroiden. Diese nennt man Trojaner, weil sie wie Hektor und Achilles „Troja“ umlaufen.