Roter Faden Physik

Wechselstrom

Mit Aufgaben

von

Dr. Ortwin Fromm

Evangelische Schule Frohnau, Berlin

A) GRUNDLAGEN

a) Bedeutung des Wechselstroms

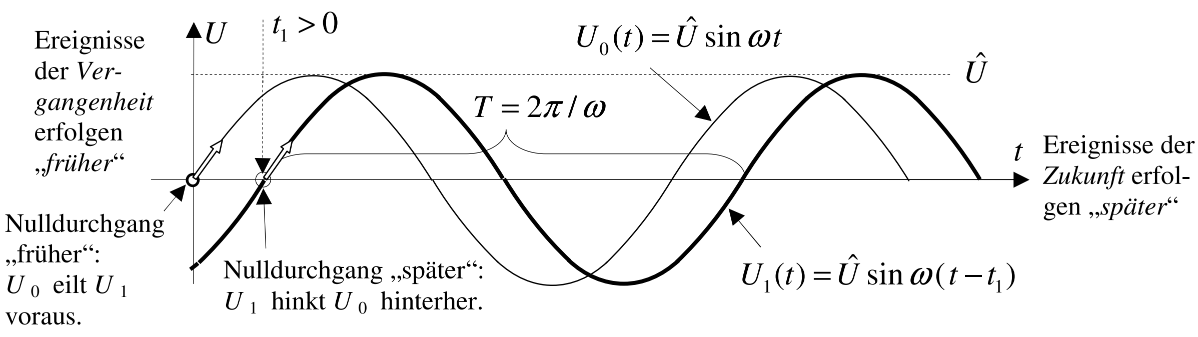
Wechselstrom entsteht durch periodisches Umpolen der Stromrichtung. Die einfachste Form ist der sinusförmige Wechselstrom. Andere Wechselstromformen, wie die Sägezahn- oder die Rechteckform, können als Fouriersummen von Sinusformen angesehen werden. Deshalb beschäftigen wir uns weiterhin nur mit sinusförmigen Wechselströmen. Technisch wird Wechselstrom im Generator durch eine in einem Magnetfeld rotierende Leiterschleife erzeugt, wobei die induzierte Spannung an den Leiterschleifenenden über zwei verschiedene *nicht* unterbrochene Schleifringe abgegriffen wird (also kein Kommutator).
Während das elektrische Wechselfeld sich nahezu mit Lichtgeschwindigkeit über die Leiter ausbreitet, bewegt sich ein einzelnes Elektron durch die fortwährenden Stöße mit den Atomrümpfen z.B. während einer $50Hz$ Periode nur um Bruchteile von Mikrometern hin und her. Die Elektronen führen also nur winzige Zitterbewegungen aus.
Der Wechselstrom kann, zum Zwecke der verlustarmen Fernübertragung, auf kleine Werte herunter transformieren werden, wobei die Spannung entsprechend steigt. Kleine Ströme bedeuten nämlich kleine Übertragungsverluste.
Getaktete, amplituden- bzw. frequenzmodulierte Wechselströme und -spannungen verwendet man auch zur Daten- und Informationsübertragung. Der Frequenzbereich des Wechselstroms erstreckt sich über den *NF* (Niederfrequenz-), *MF* (Mittelfrequenz-) und *HF* (Hochfrequenzbereich) von einigen Hertz bis zu *GHz* und *THz*.

b) Funktionsgleichung, Amplitude, Frequenz, Phasenwinkel

Nach obiger Festlegung betrachten wir Strom und Spannung also sinusförmige Funktionen der Zeit: $I(t) = \hat{I}\sin\,\omega(t-t_{0,I})$ und $U(t) = \hat{U}\sin\omega(t-t_{0,U})$.
Der konstante Vorfaktor heißt *Amplitude* und erhält die Kennzeichnung „Dach".
Die Frequenz f gibt die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde an und besitzt die Maßeinheit Hertz $Hz = s^{-1}$. Die Periodenlänge bzw. *Schwingungsdauer* T ist der Kehrwert der Frequenz $T = 1/f$ mit der Maßeinheit s. Für die *Kreisfrequenz* gilt $\omega = 2\pi f$ (Maßeinheit ebenfalls Hz)
Die Zeiten $t_{0,U}$ und $t_{0,I}$ sind die „ersten" Nulldurchgänge von $U(t)$ und $I(t)$ nach $t = 0$.
Das Argument der Sinusfunktion bezeichnet man auch als *Phasenwinkel* oder *Phase* φ.
Die Phase $\varphi(t) = \omega(t-t_0) = \omega\cdot t - \omega t_0$ ist eine *lineare* Funktion der Zeit mit ω als „Steigung" und $-\omega t_0$ als „ y-Achsenabschnitt". t_0 bzw. ωt_0 gibt also die Zeitverschiebung bzw. die *Phasenverschiebung* gegenüber der „normalen" Sinuskurve mit Nulldurchgang bei $t = 0$ an.

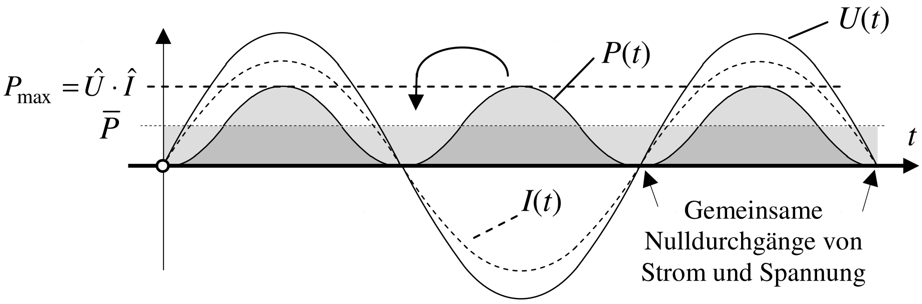
Vorauseilen und Nachhinken.

Ist z.B. der Zeitpunkt t_1 des „ersten" Nulldurchganges eines sinusförmigen Spannungsverlaufes $U_1(t)$ *größer* als null, so *hinkt* $U_1(t)$ der Ursprungskurve $U_0(t) = \hat{U}\sin\omega t$ *hinterher*.



c) Spannung, Strom, Leistung, Effektivwerte

1) Spezialfall **1**. Die Phasendifferenz zwischen Strom und Spannung sei null.
Am Ohmschen Widerstand R sind Strom und Spannung *in Phase*, d.h., ihre Phasendifferenz $\Delta\varphi = \varphi_{0,I} - \varphi_{0,U} = \underline{\underline{0}}$. Die Nulldurchgänge fallen hier also zusammen.
Zur Vereinfachung können wir dann beide Phasenverschiebungen weglassen und haben $U(t) = \hat{U}\sin\omega t$ vorgegeben. Dann ergibt sich $I(t) = \hat{I}\sin\omega t$ mit $\hat{I} = \hat{U}/R$.
Betrachte jetzt die elektrische *Leistung* (in *Watt*) $\boxed{P(t) = U(t)\cdot I(t)}$. Sie ist jetzt ebenfalls zeitabhängig. Wegen $P(t) = \hat{U}\,\hat{I}\cdot\sin^2\omega t$ ist $P(t)$ jedoch in jedem Moment ≥ null.
D.h.: Unabhängig von der Laufrichtung der Elektronen, stets wird eine *positive* „Portion“ Leistung übertragen. $P(t)$ pendelt zwischen Null und dem positiven Wert $\hat{U}\cdot\hat{I}$ hin und her.



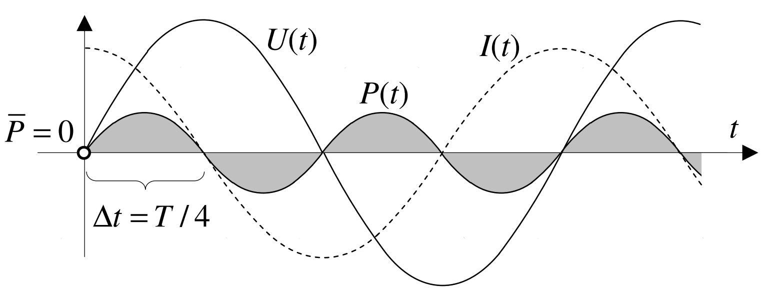
Durch „Abschneiden“ der „Kuppen“ und „Einlegen“ in die „Täler“ erhält man den zeitlichen Mittelwert $\overline{P}$ der Leistung.

Ergebnis der Mittelwertbildung:

Eine Wechselspannung bewirkt an R im Mittel die Leistung $\overline{P} = \dfrac{\hat{U}\cdot\hat{I}}{2} = \boxed{\dfrac{\hat{U}}{\sqrt{2}}} \bullet \boxed{\dfrac{\hat{I}}{\sqrt{2}}}$.

Beim Gleichstrom gilt $P = \boxed{U} \bullet \boxed{I}$. Die Umstellung im Kasten zeigt, dass eine *Gleich*spannung $\boxed{U} = \boxed{\dfrac{\hat{U}}{\sqrt{2}}}$ und ein *Gleich*strom $\boxed{I} = \boxed{\dfrac{\hat{I}}{\sqrt{2}}}$ (konstant) *dieselbe* Leitung überträgt, wie es der Wechselstrom (im Mittel) tut. Die Werte $\hat{U}/\sqrt{2}$ bzw. $\hat{I}/\sqrt{2}$ nennt man daher die Effektivwerte des analogen Gleichstroms: $\boxed{U_{eff} = \hat{U}/\sqrt{2}}$ und. $\boxed{I_{eff} = \hat{I}/\sqrt{2}}$.
Die Frequenz spielt für die Effektivwerte keine Rolle.
Zahlenbeispiel: Für $U_{eff} = 220V$ ergibt sich die Scheitelspannung $\hat{U} = \sqrt{2}\cdot 220V \approx 311V$.

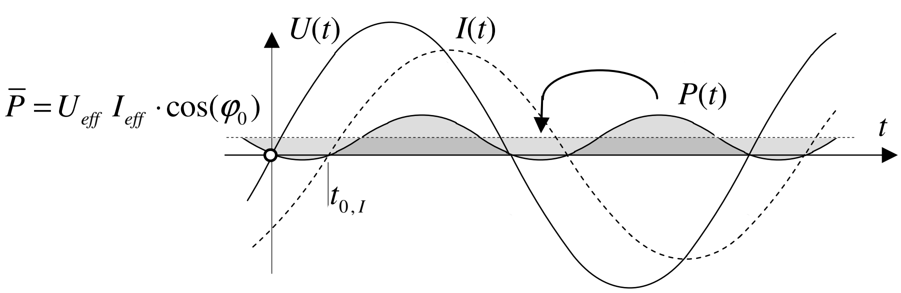
2) Spezialfall **2**: Phasendifferenz zwischen Strom und Spannung = ±90° bzw. ± π / 2
Für $\Delta\varphi = \varphi_{0,I} - \varphi_{0,U} = \pm\pi/2$ schwankt das Produkt $P(t) = U(t)\cdot I(t)$ um die t-Achse, sodass der Mittelwert über eine Periode *null* ist. Der Verbraucher nimmt daher im Mittel *keine* Leistung auf. *Dennoch* flutet Leistung zwischen Generator und „Verbraucher“ hin und her und belastet die Leitungen des Stromkreises.

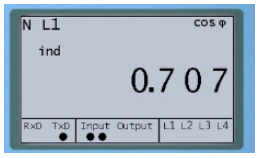


Voltmeter $\boxed{V}$, Amperemeter $\boxed{A}$ und Leistungsmeter $\boxed{P}$ werden auf ~ eingestellt. $\boxed{V}$ und $\boxed{A}$ zeigen etwas an, doch die Anzeige von $\boxed{P}$ ist **null**. Weil der Strom wegen der Phasenverschiebung von 90° keine Leistung überträgt, wird er **Blindstrom** genannt.

3) Wirkleistung bei beliebigem Phasenwinkel

Im Allgemeinen hat der Strom gegenüber der Spannung eine gewissen Phasenverschiebung $\Delta\varphi$, mit $-\pi/2 \le \Delta\varphi \le \pi/2$. In diesem Fall schwankt die Leistungskurve $P(t) = U(t) \cdot I(t)$ um einen oberhalb der *t*-Achse liegenden Mittelwert. Dieser repräsentiert die *Wirkleistung*, welche im Mittel vom Verbraucher aufgenommen wird.





Datenblatt mit Angabe der Phasenverschiebung.

Zur rechnerischen Vereinfachung wird als Spannungskurve $U(t) = \hat{U}\sin\omega t$ angesetzt.

Dann gilt $I(t) = \hat{I}\sin\omega(t - t_0) = \hat{I}\sin(\omega t - \varphi_0)$, mit $\varphi_0 = \omega t_0$.

Anwendung der Formel $\sin\alpha \cdot \sin\beta = ½ \cdot \cos(\alpha - \beta) - 1/2 \cdot \cos(\alpha + \beta)$ ½

liefert $P(t) = \hat{U}\,\hat{I}\sin\omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi_0) = ½ \cdot \hat{U}\,\hat{I}\cos\varphi_0 - ½ \cdot \hat{U}\,\hat{I}\cos(2\omega t - \varphi_0)$.

Der erste Summand $½ \cdot \hat{U}\,\hat{I} \cdot \cos\varphi_0 = U_{eff}\, I_{eff} \cdot \cos\varphi_0$ ist zeitlich konstant.

Er liefert die **Wirkleistung** $\boxed{\bar{P}_W = U_{eff}\, I_{eff} \cdot \cos\Delta\varphi_0}$.

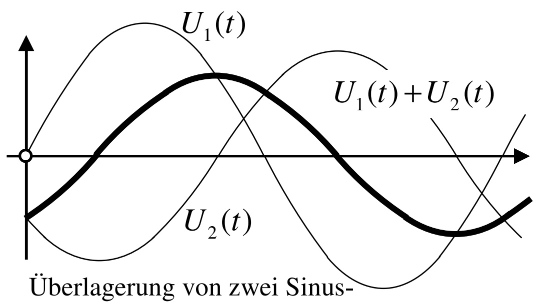
Im Datenblatt von Elektromotoren wird der **Leistungsfaktor** „cos φ“-Wert angegeben.

Der zweite Summand $-½ \cdot \hat{U}\,\hat{I}\cos(2\omega t - \varphi_0)$ oszilliert wie in c)1) mit doppelter Frequenz um die t-Achse, sodass dessen Mittelwert über eine Periode *null* ist.

d) **Zeigerdarstellung** von Wechselgrößen

1) Problemstellung

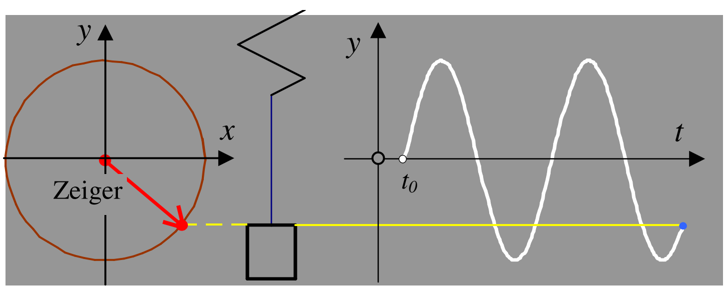
Wird eine Schaltung durch eine Wechselspannung der Kreisfrequenz ω angesteuert, so stellen sich innerhalb der Schaltung Spannungen und Ströme ein, die sämtlichst *auch* Wechselgrößen der Kreisfrequenz ω sind. Doch stimmen die Amplituden und Phasen i.A. *nicht* mit denen der eingespeisten Größe überein. Zur Berechnung müssen Summen von Wechselgrößen *gleicher* Frequenz, aber *unterschiedlicher* Amplitude und Phase bebildet werden. Das gelingt aufwändig mit den Additionstheoremen. Viel einfacher geht's mit der **Zeigerrechnung**.



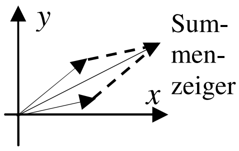
Überlagerung von zwei Sinusfunktionen gleicher Frequenz

2) Grundlagen

Dreht man einen Nullpunktspfeil der Länge $\hat{y}$ während der Schwingungsdauer T einmal in mathematisch positivem Sinn um 360°, so liefert die Projektion der Kreisbewegung den Graphen einer Sinusfunktion. Den rotierenden Nullpunktspfeil



Der Clou: Die *Summe* zweier *gleich*frequenter Wechselgrößen unterschiedlicher Amplitude und Phase erhält man einfach durch die Projektion des *Summenzeigers*. Somit lässt sich die Addition der Wechselgrößen per Vektoraddition im „zeitlich *eingefroren*“ Zustand durchführen.



3) Vektordarstellung von Zeigern

In der Elektrotechnik verwendet man zur Beschreibung der Zeiger *komplexe* Zahlen. Ebenso gut ist die Vektordarstellung geeignet. Z.B.: $\vec{U} = \left(U_x \middle| U_y\right)$.

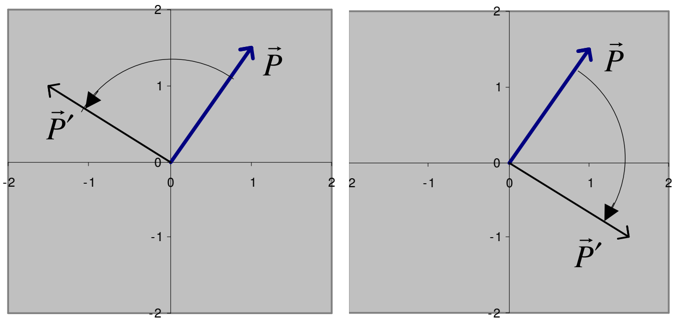
4) Phasenverschiebung von $\pm\ \pi/2$ entspricht in der Zeigerdarstellung der Drehung um $\pm$ 90°

Die *Drehung* eines gegebenen Zeigers $\vec{P} = \left(x \middle| y\right)$ um eine viertel Periode (90°) nach *vorn* ergibt sich durch:

$+90°: \vec{P} = \left(x \middle| y\right) \rightarrow \vec{P}' = \left(-y \middle| x\right)$

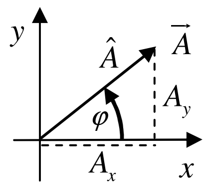
entsprechend gilt:

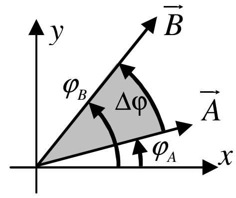
$-90°: \vec{P} = \left(x \middle| y\right) \rightarrow \vec{P}' = \left(y \middle| -x\right)$



5) Winkel zwischen zwei Zeigern.

Der Polarwinkel φ eines Zeigers $\vec{A} = \left(A_x \middle| A_y\right)$ liegt zwischen gilt -180° und +180°. Die Formel $\varphi = \arccos\left(A_x / \left|\vec{A}\right|\right)$ liefert aber nur Werte zwischen 0° und 180°. Um für Zeiger im 3. und 4. Quadranten negative Winkel zu erhalten multipliziert man noch mit dem Vorzeichen von A_y. Also Dann folgt $\boxed{\varphi = \text{sign}\left(A_y\right) \cdot \arccos\left(A_x / \hat{A}\right)}$. Den Winkel $\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A$ zwischen den Zeigern $\vec{A}$ und $\vec{B}$ erhält man dann durch die Differenz der Einzelwinkel. Die Phasendifferenz ist null, wenn $\varphi_B = \varphi_A$ gilt. Dann muss auch $A_x / \hat{A} = B_x / \hat{B}$ gelten. Multiplizieren mit $\hat{A}$ und $\hat{B}$, sowie quadrieren ergibt $A_x^2 \cdot \left(B_x^2 + B_y^2\right) = B_x^2 \cdot \left(A_x^2 + A_y^2\right)$. Ausmultiplizieren, Wegstreichen und Wurzelziehen liefert letztlich die $\boxed{\text{Bedingung für } \Delta\varphi = 0\ :\ A_x B_y = A_y B_x}$





B) SCHALTUNGEN

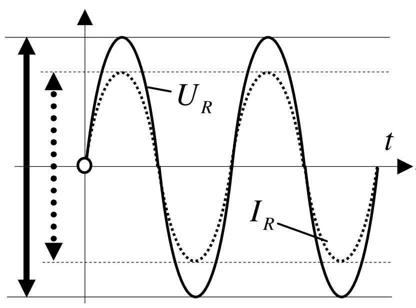
Wir betrachten Schaltungen mit *R*, *C* und *L* . Nach außen wirken sie wie eine „*black box*“. Der **Input** ist jeweils die angelegte Spannung. Der **Output** ist dann der fließende Strom.

a) Einzelschaltungen *R* , *C* , *L*

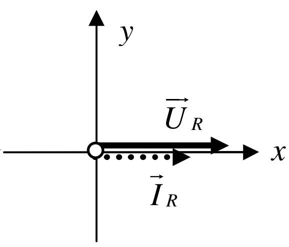
1) Widerstand *R*

Die Spannung $U(t) = \hat{U} \sin \omega t$ lässt den Strom $I(t) = \hat{I} \cdot \sin \omega t$ mit $\hat{I} = \hat{U} / R$ fließen.

Für die Amplituden gilt das Ohmsche Gesetz $\boxed{\hat{U} = R \cdot \hat{I}}$.



Herkömmliche Darstellung



Zeigerdarstellung

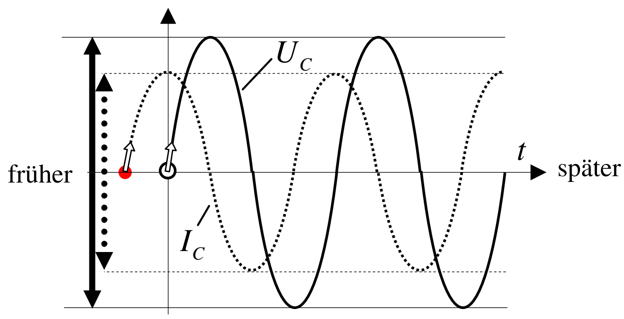
Vektorschreibweise: Aus $\vec{U} = \left(\hat{U} \middle| 0\right)$ folgt $\vec{I} = \left(\hat{I} \middle| 0\right)$, mit $\hat{I} = \hat{U} / R$.

2) <u>Kondensator mit der Kapazität C.</u>

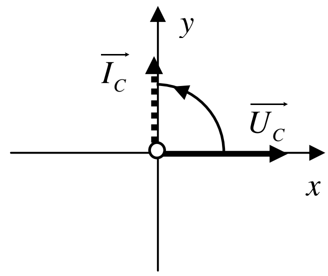
Geg. ist $U(t) = \hat{U}\sin\omega t$. Für die Ldg. gilt dann $Q = C \cdot U = C \cdot \hat{U}\sin\omega t$. Der Strom ergibt sich dann $I = \dot{Q}$ durch Ableiten: $I = C \cdot \dot{U} = C \cdot \omega \cdot \hat{U} \cdot \cos\omega t$.

Der Strom verläuft also nach einer Kosinuskurve. Der „erster“ Nulldurchgang ist um eine viertel Periode *früher* hat als bei der Spannungskurve. Daher gilt:

Am Kondensator eilt der Strom der Spannung um eine viertel Periode voraus.



<u>Herkömmliche</u> Darstellung



Die <u>Zeigerdarstellung</u> zeigt den „vorauseilenden Gehorsam“

Für die Amplituden gilt $\boxed{\hat{U} = X_C \cdot \hat{I}}$ mit $\boxed{X_C = \dfrac{1}{\omega \cdot C}}$.

Der kapazitive Widerstand X_C ist <u>antiproportional</u> zu ω bzw. zur Frequenz f.

<u>Vektorschreibweise</u>: Aus $\vec{U} = (\hat{U} \,|\, 0)$ folgt $\vec{I} = (0 \,|\, \hat{I})$, mit $\hat{I} = \omega C \hat{U}$.

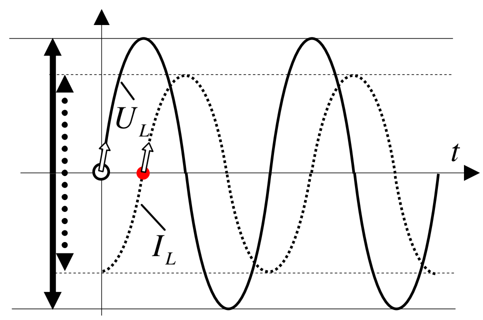
3) <u>Spule mit Selbstinduktivität L</u>

Die *angeklemmte* Spannung sei wieder $U = \hat{U}\sin\omega t$. An der Spule gilt $U_{Kl} = +L \cdot \dot{I}$.

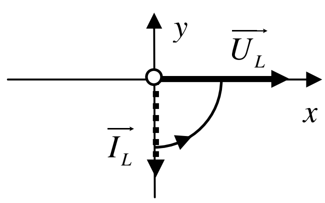
Einsetzen und integrieren führt zu $I = \dfrac{\hat{U}}{L}\int \sin\omega t\; dt = -\dfrac{\hat{U}}{\omega L} \cdot \cos\omega t$.

Der Strom verläuft also nach einer „Minus-Kosinuskurve“. Sein „erster“ Nulldurchgang erfolgt daher eine viertel Periode *später*, als der „erste“ Nulldurchgang der Spannung. Es gilt:

An der Spule hinkt der Strom der Spannung um eine viertel Periode nach.



<u>Herkömmliche</u> Darstellung



Die <u>Zeigerdarstellung</u> zeigt die „Bockigkeit“ der Spule

Für die Amplituden gilt $\boxed{\hat{U} = X_L \cdot \hat{I}}$ mit $\boxed{X_L = \omega \cdot L}$.

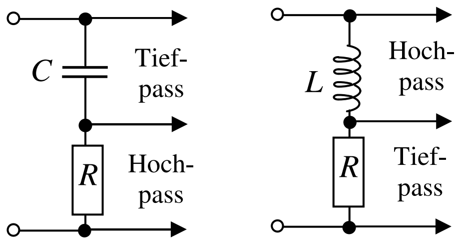
Der induktive Widerstand X_L ist <u>proportional</u> zu ω bzw. zur Frequenz f.

<u>Vektorschreibweise</u>: Aus $\vec{U} = (\hat{U} \,|\, 0)$ folgt $\vec{I} = (0 \,|\, -\hat{I})$, mit $\hat{I} = \dfrac{\hat{U}}{\omega L}$.

Zusammenfassung

	„Ohmsches G“	„Widerstand“	$\Delta\varphi$ von U nach I	$\Delta\varphi$ textlich
Widerstand	$\hat{U} = X_R \cdot \hat{I}$	$X_R = R$	$\Delta\varphi = 0$	I ist mit U in Phase
Kondensator	$\hat{U} = X_C \cdot \hat{I}$	$X_C = \dfrac{1}{\omega C}$	$\Delta\varphi = +90°$	I eilt U um 90° voraus
Spule	$\hat{U} = X_L \cdot \hat{I}$	$X_L = \omega L$	$\Delta\varphi = -90°$	I hinkt U um 90° nach

b) <u>Passschaltungen aus *zwei* Elementen</u>



Passschaltungen wirken als Filter, welche das Frequenzspektrum zweiteilen. Der eine Frequenzbereich wird unterdrückt, der andere weitgehend ungeschwächt durchgeleitet. Auf Grund dessen werden Passschaltungen in der NF-Technik zur Klangregelung eingesetzt. Die einfachsten Passschaltungen sind Reihenschaltungen von Widerstand und Kondensator bzw. von Widerstand und Spule. Eine Reihenschaltung wirkt als Spannungsteiler, an welchem die gewünschte Teilspannung abgegriffen werden kann.
Den Frequenzverlauf gewinnt man graphisch aus dem *Zeigerdiagramm* und rechnerisch aus dem *Zeigerplan*. Alle Spannungen und Ströme werden dazu als Zeiger gezeichnet und mittels Vektordarstellung berechnet. Der <u>erste Schritt</u> ist immer das Aufsuchen einer <u>Gleichheit</u> gemäß der Kirchhoffschen Maschen- bzw. Knotenregel.

1) <u>Die *RC*-Reihenschaltung: Hier stimmen die *Strom*zeiger überein.</u>

<u>*Gegeben*</u>: Bauteilgrößen: R, C. Sowie $\hat{U}$ bzw. $U_{eff} = \hat{U}/\sqrt{2}$. ω ist variabel.

<u>*Gesucht*</u>: Der Strom $\hat{I}$, der hier mit $\hat{I}_R$ und $\hat{I}_C$ übereinstimmt.

Die Auswertung ergibt dann

a) die <u>Impedanz Z</u> = frequenzabhängige Gesamtwiderstand. $\boxed{Z = \hat{U}/\hat{I}}$.

b) die <u>Teilspannungen</u> $\hat{U}_R, \hat{U}_C$ und die <u>Phasenwinkel</u> φ

<u>*Zeichnerische Durchführung*</u>:

a) Hier $\vec{I}_R = \vec{I}_C$. Ihr gemeinsamer Zeiger kommt so im mit bel. Länge auf die x-Achse.

b) $\vec{U}_R$ kommt (mit bel. Länge) auch auf die x-Achse.

c) $\vec{U}_C$ kommt (mit bel. Länge) auf die negative y-Achse.

d) Die Gesamtspannung erhälztman durch die Vektoraddition $\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_C$.

e) Ergebnis: $\hat{U} = \left|\vec{U}\right|$ und $\varphi = \sphericalangle$ von $\vec{U}$ nach $\vec{I}$.

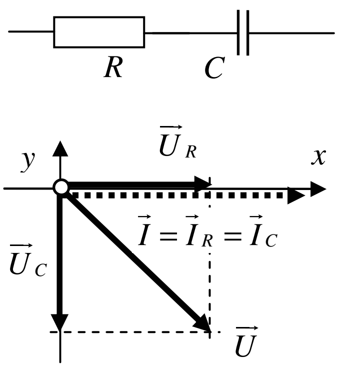
<u>*Rechnerische Durchführung*</u>: Die **Gleichheit** liegt bei $\vec{I}_R = \vec{I}_C$. Obwohl U gegeben und I gesucht ist, muss die Rechnung also mit I beginnen und zwar mit einem Ansatz für I .

a) Trage $\vec{I}_R = (x|0)$, $\vec{I}_C = (x|0)$ und $\vec{I} = (x|0)$ in die Stromspalte ein.

b) Trage $\vec{U}_R = (xR\,|\,0)$ und $\vec{U}_C = (0|-x/\omega C)$ in die Spannungsspalte ein.

c) Addiere $\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_C = (xR|-x/\omega C)$ und bilde $\hat{U} = \sqrt{(xR)^2 + (-x/\omega C)^2}$ bzw.

$$\hat{U} = x \cdot \sqrt{R^2 + 1/\omega^2 C^2} \text{ . Ergebnis: } Z = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{x\sqrt{R^2 + 1/\omega^2 C^2}}{x} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$



	Zeigerplan für die *RC*-Reihenschaltung			
	Strom		Spannung	Bem.
1	$\vec{I}_R = x(1 \mid 0)$	4	$\vec{U}_R = x(R \mid 0)$	$x = ?$
2	$\vec{I}_C = x(1 \mid 0)$	5	$\vec{U}_C = x\left(0 \,\middle|\, -\dfrac{1}{\omega C}\right)$	
3	$\vec{I} = x(1 \mid 0)$	6	Summe: $\vec{U} = x \cdot \left(R \,\middle|\, -\dfrac{1}{\omega C}\right)$	$\lvert\vec{U}\rvert = \hat{U}$ liefert x

<u>Auswertung:</u>

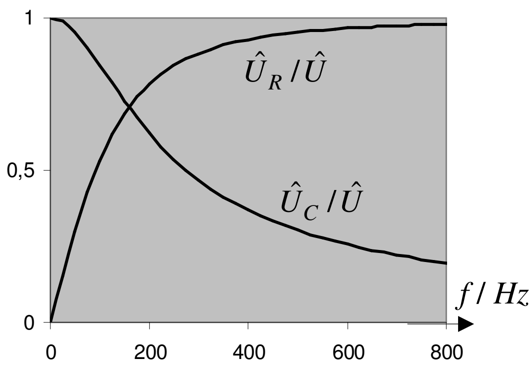
a) Weil $\hat{U}$ als angelegte Spannungsamplitude geg. ist, folgt $x = \hat{U} \,/\, \sqrt{R^2 + 1/\omega^2 C^2}$.

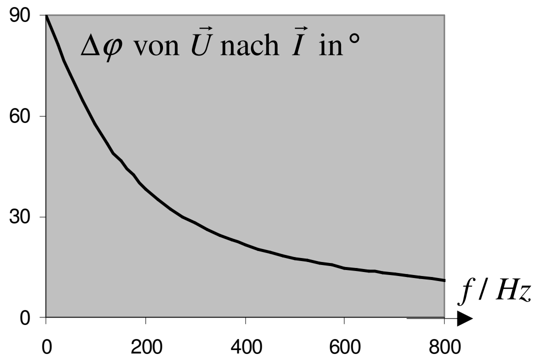
b) Damit folgen $\hat{U}_R = x \cdot R = \hat{U} \cdot R / \sqrt{R^2 + 1/\omega^2 C^2}$ und $\hat{U}_C = \dfrac{x}{\omega C} = \dfrac{\hat{U} / \omega C}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}}$.

c) Damit Impedanz $Z = \hat{U} / \hat{I} = \sqrt{R^2 + 1/\omega^2 C^2}$;

d) $\Delta\varphi = \varphi_I - \varphi_U = 0 - \operatorname{sign}(U_y) \cdot \arccos\left(U_x / \hat{U}\right) = +\arccos\left(\dfrac{R}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}}\right)$

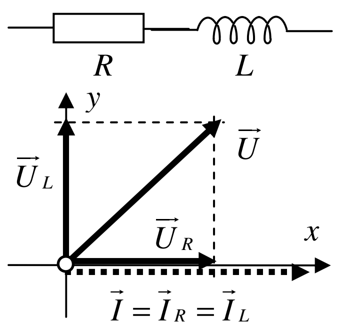
Beispiel: $R = 50\,\Omega;\ C = 20\,\mu F$





Die Filterfunktion ist gut erkennbar

2) <u>Die *RL*-Reihenschaltung: : Hier stimmen die *Strom*zeiger überein.</u>



	Zeigerplan für die *RL*-Reihenschaltung			
	Strom		Spannung	Bem.
1	$\vec{I}_R = (x \mid 0)$	4	$\vec{U}_R = (xR \mid 0)$	$x = ?$
2	$\vec{I}_L = (x \mid 0)$	5	$\vec{U}_L = (0 \mid x\omega L)$	
3	$\vec{I} = x(1 \mid 0)$	6	Summe: $\vec{U} = x \cdot (R \mid \omega L)$	$\lvert\vec{U}\rvert = \hat{U}$ $\to x$

<u>Auswertung des Zeigerplans</u>:

<u>*Gegeben*</u>: R, L, $\hat{U}$, ω . <u>*Gesucht*</u>: x, $\hat{I}$, $\hat{U}_R$, $\hat{U}_L$, Z , φ

Auswertung:

a) Aus dem gegebenen $\hat{U}$ folgt $x = \hat{I} = \hat{U} \,/\, \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$.

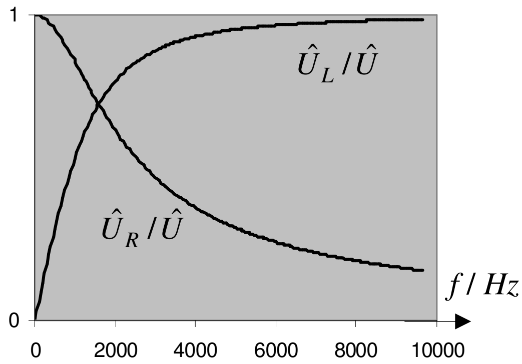
b) Impedanz $Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$.

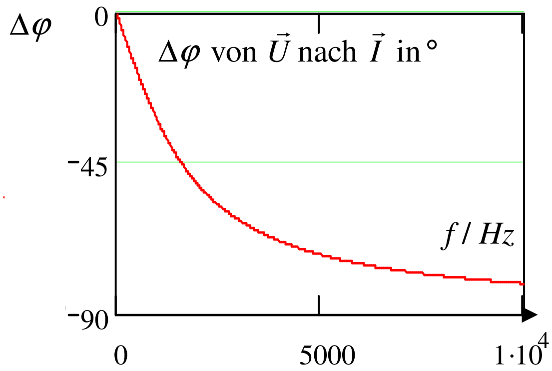
c) Damit folgen $\hat{U}_R = R \cdot x = \hat{U} \cdot R / \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$; $\hat{U}_L = \omega L \cdot x = \dfrac{\hat{U}\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$

d) $\varphi = \arccos \dfrac{U_x I_x + U_y I_y}{\hat{U} \cdot \hat{I}} = \arccos \dfrac{x R \cdot x + U_y \cdot 0}{x \cdot \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot x} = \arccos \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$

$$\Delta\varphi = \varphi_I - \varphi_U = 0 - \operatorname{sign}\left(U_y\right) \cdot \arccos\left(U_x \,/\, \hat{U}\right) = -\arccos\left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\right)$$

Beispiel: $R = 100\,\Omega$; $L = 10\,mH$





Die Filterfunktion ist gut erkennbar

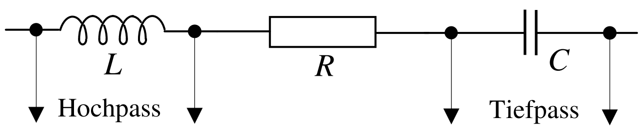
c) Die acht möglichen *LCR*-Schaltungen

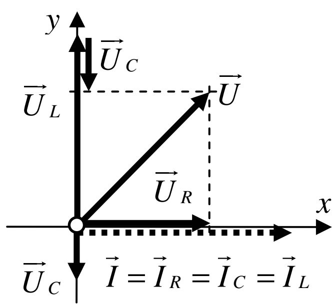
Verwendet man in einer Schaltung die drei Bauteilen R , C und L jeweils *einmal*, so lassen sich durch Parallel- bzw. Reihenschaltung *acht* verschiedene Anordnungen konstruieren. Die Zeigerplanauswertung ergibt alle Spannungen und Ströme, die Impedanzkurve, sowie die Gesamtphasenverschiebung $\varphi(\omega)$ von $\vec{U}$ *nach* $\vec{I}$. Alle untersuchten Schaltungen besitzen eine *Resonanzfrequenz* $f_r = \omega_r / 2\pi$, für welche die Phasenverschiebeung $\varphi = 0$ ist. Für diese spezielle Frequenz benimmt sich die gesamte Schaltung (black box) dann wie ein „normaler" ohmscher Widerstand. Fährt man die Frequenz f kontinuierlich hoch, dann liefert f_r die Umschlagstelle von *induktivem* zu *kapazitivem* Verhalten.

Eine reale Spule besitzt zwangsläufig auch einen ohmschen Widerstand. Die reale Spule wird daher als Reihenschaltung einer idealen Spule mit $R = 0$ und einer reinen Induktivität behandelt. Von den acht möglichen Schaltungen sind daher nur zwei technisch relevant. Die verbleibenden sechs Schaltungen werden im Anhang zu Trainingszwecken dargestellt.

Schaltung 1) R, C, L in Reihe: **Siebkette**

Diese Schaltung dient als *Hoch- und Tiefpass 2. Stufe*





Bei der Reihenschaltung stimmen die drei Ströme überein. Deshalb wird ein erster Pfeil mit der noch unbekannter Länge $\hat{I} = \hat{I}_L = \hat{I}_R = \hat{I}_C = x$ auf die x-Achse gesetzt. Nun ergeben sich die drei Zeiger für die Spannungen nach dem obigen Kapitel. Durch Zeigeraddition erhält man die Gesamtspannung, deren Betrag den vorgegebenen Wert $\hat{U}$ besitzen muss. Aus dieser Forderung ergibt sich das unbekannte x. Hieraus erhalten wir alle weiteren Größen.

	Zeigerplan für Schaltung 1)			
	Strom		Spannung	Bemerkung
1	$\vec{I}_R = (x \mid 0)$	5	$\vec{U}_R = (R\,x \mid 0)$	$x = \hat{I} = ?$
2	$\vec{I}_C = (x \mid 0)$	6	$\vec{U}_C = \left(0 \,\middle|\, -\frac{x}{\omega C}\right)$	
3	$\vec{I}_L = (x \mid 0)$	7	$\vec{U}_L = (0 \mid \omega L\,x)$	
4	$\vec{I} = x(1 \mid 0)$	8	$\vec{U} = x \cdot \left(R \,\middle|\, \omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$	Aus $\lvert\vec{U}\rvert = \hat{U}$ folgt $x = \hat{I}$

<u>Auswertung:</u>

a) Aus dem gegebenen $\hat{U}$ folgt $\hat{I} = x = \hat{U} \Big/ \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$

b) Impedanz $Z(\omega) = \dfrac{\sqrt{U_x^2 + U_y^2}}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} = \dfrac{x \cdot \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}{x} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$

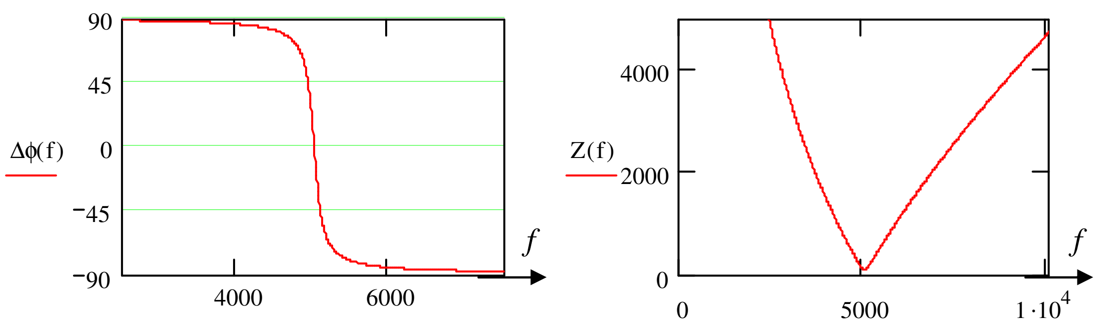
c) $\Delta\varphi = \arccos \dfrac{R \cdot 1 + U_y \cdot 0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \arccos \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$

d) Die Resonanzfrequenz folgt aus $\varphi(\omega) = 0$ bzw. $U_x I_y = U_y I_x$. Einsetzen ergibt

$R \cdot 0 = (\omega L - 1/\omega C) \cdot 1$ Ergebnis: $\omega_r = \dfrac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$. Das ist gerade die Thomsonfrequenz.

Der Widerstand spielt für ω_r bei der Siebkette also keine Rolle.

Die Berechnungen erfolgt mittels TR.

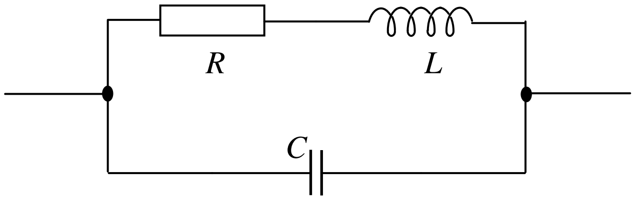


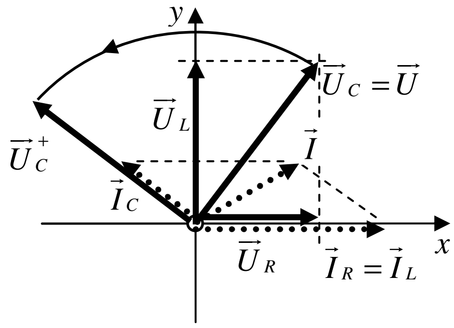
Schaltung mit $R = 100\,\Omega$; $C = 10\,nF$; $L = 0{,}1\,H$ ergibt $f_r = 5033\,Hz$

Weil die Impedanz (der Widerstand) für $\omega_r = 2\pi f_r$ *minimal* ist, fließt für diese Frequenz *maximaler* Strom. Die Schaltung „siebt“ also *eine* Frequenz heraus und heißt daher *Siebkette*. Die Reihenschaltung der drei Bauteile wird auch in der Empfangs- bzw. Sendeantenne für elektromagnetische Wellen als Frequenzwähler verwendet. Dabei wird ausgenutzt, dass der *maximale* *Strom* $I(f_r)$ an der *Spule* mittels einer Sekundärspule *induktiv* auskoppelbar ist.

Schaltung 2) R, L in Reihe, C parallel dazu :

Sperrkreis, Resonanzkreis





Gleichheit: Es gilt $\vec{I}_R = \vec{I}_L$. Also wird deren gemeinsamer Zeiger (mit bel. Länge x) auf die x-Achse gesetzt. Daraus ergeben sich $\vec{U}_R$, $\vec{U}_L$ und $\vec{U} = \vec{U}_C = \vec{U}_R + \vec{U}_L$ nach den Regeln. $\vec{U}_C$ wird jetzt um 90° nach vorne gedreht. Multiplizieren mit ωC liefert $\vec{I}_C$. $\vec{I}_R + \vec{I}_C$ ergibt $\vec{I}$.

	Zeigerplan für Schaltung 2)			
	Strom		Spannung	Bemerkung
1	$\vec{I}_R = (x\|0)$	3	$\vec{U}_R = (Rx\|0)$	x unbekannt
2	$\vec{I}_L = (x\|0)$	4	$\vec{U}_L = (0\|\omega L x)$	
		5	$\vec{U} = \vec{U}_C = x(R\|\omega L)$	Hieraus folgt x
7	$\vec{I}_C = \omega C \cdot x(-\omega L\|R)$	6	$\vec{U}_C^{+90°} = x(-\omega L\|R)$	
8	$\vec{I} = x(1-\omega^2 LC\|\omega CR)$			

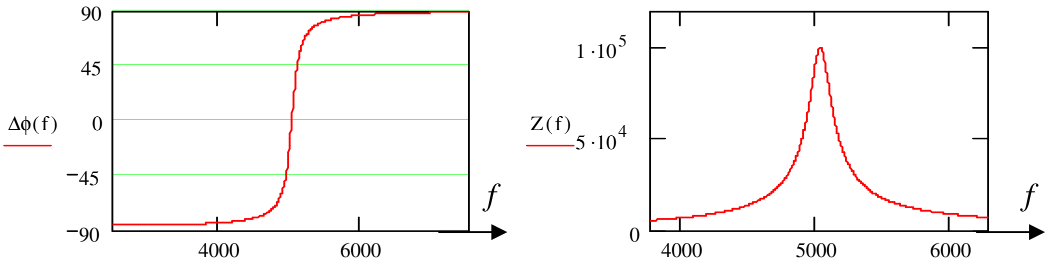
Ergebnis: $x = \hat{I}_R = \dfrac{\hat{U}}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}$; $Z(\omega) = \dfrac{\sqrt{U_x^2+U_y^2}}{\sqrt{I_x^2+I_y^2}} = \dfrac{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2+(\omega CR)^2}}$

$$\Delta\varphi = \arccos\frac{U_x I_x + U_y I_y}{\hat{U}\cdot\hat{I}} = \arccos\frac{R\cdot(1-\omega^2 LC)+\omega L\cdot\omega CR}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}\cdot\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2+(\omega CR)^2}}$$

Die Schaltung benimmt sich wie ein ohmscher Widerstand, wenn $\varphi(\omega)=0$ bzw. $U_x I_y = U_y I_x$ gilt. Daraus folgt die Resonanzfrequenz $R\cdot\omega CR = \omega L\cdot(1-\omega^2 LC)$.

Daraus folgt $CR^2 = L - \omega^2 L^2 C$ bzw. $\omega^2 = \dfrac{L}{L^2 C} - \dfrac{CR^2}{L^2 C}$ bzw. $\omega_r = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{L^2}}$.

Wegen $R \neq 0$ gilt die Thomsonformel nicht mehr genau.



Schaltung mit $R = 100\,\Omega$; $C = 10\,nF$; $L = 0{,}1\,H$ ergibt $f_r = 5030\,Hz$; Strommessung an $1\,k\Omega$

Weil die Impedanz (der Widerstand) bei etwa ω_r *maximal* ist, wird der Strom bei dieser Frequenz *minimal*. Er wird also „gesperrt“. Die Schaltung heißt daher auch *Sperrkreis* .

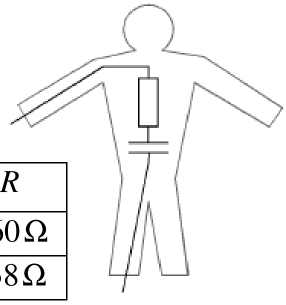
Der Sperrkreis wird als Frequenz-Selektor in Empfangs- u. Sendegeräten verwendet.
Die Flanken der Impedanzkurve liefern eine Beziehung zwischen Frequenz und Widerstand. Sie werden daher bei der Frequenzmodulation im UKW-Bereich verwendet.

C) ÜBUNGSAUFGABEN

1) Elektrische Messungen in der Sportmedizin

Den Fitnesszustand von Sportlern kann man z.B. mit der bioelektrische Impedanzanalyse (BIA) ermitteln. Dabei werden Wechselstromwiderstand und Phasenverschiebung zwischen Spannung und Stromstärke am Körper des Sportlers gemessen.

Model: Die Zellmembranen „sind“ Kondensatoren, die Körperflüssigkeit hat einen ohmschen Widerstand *R*. *Z* ergibt sich als RC- Reihenschaltung. Ein hoher kapazitiver Widerstand X_C ist gut, ein hoher ohmscher Widerstand *R* ist schlecht. Bei $f = 50\,kHz$ wird die Stromstärke $I_{eff} = 0{,}8\,mA$ eingestellt.
Die Anschlüsse erfolgen an präzisen Stellen von Hand und Fuß.



Fußballer	X_C	R
untrainiert	$50\,\Omega$	$460\,\Omega$
trainiert	$68\,\Omega$	$538\,\Omega$

Eine Körperfettwaage nutzt auch die BIA-Methode. Sie misst zwischen den lose aufgestellten Füßen.

Aufgaben:

1 Beschreibe die Vorgänge am Kondensator im Wechselstromkreis.

2 Berechnen die erforderlich Spannung U_{eff}, um im untrainierten Zustand des Fußballers $I_{eff} = 0{,}8\,mA$ zu erhalten.

3 Erläutere, wie die Kapazität den Gesamtwiderstand *Z* und Phasenverschiebung φ in einer Reihenschaltung aus Kondensator und ohmschem Widerstand.
Untersuche, wie sich *Z* und φ durch das Training verändert haben.

4 Beurteilen Sie, ob mit einer einfachen Körperfettwaage aussagekräftige Messwerte gewonnen werden können. Erläutern Sie mindestens zwei Argumente, die Ihr Urteil stützen.

Experiment:
Vergleiche für eine Reihenschaltung aus Kondensator und Widerstand im Wechselstromkreis die experimentell bestimmte Impedanz Z mit dem aus den Herstellerangaben für Kondensator und Widerstand berechneten Wert für *Z*.

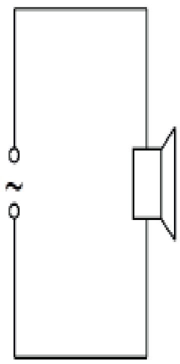
a) Ermittele dazu bei $f = 50\,Hz$ ein Messwertpaar für Spannung und Stromstärke.

b) Die Planung, die Durchführung und die Auswertung des Experimentes beinhalten
- den Entwurf eines Schaltplans,
- den Aufbau des Versuches und das Aufnehmen der Messwerte,
- die Berechnung des Gesamtwiderstandes aus den Messwerten,
- die Berechnung des Gesamtwiderstandes aus den Herstellerangaben sowie
- den Vergleich

2) Hochpassfilter

Moderne Lautsprecherboxen haben mindestens ein Zweiwegesystem mit getrenntem Hoch-und Tieftöner. Der jeweilige Lautsprecher muss richtig angesteuert werden.
Mithilfe von *RCL*- Schaltungen können Wechselströme bzw. Wechselspannungen bestimmter Frequenzbereiche entweder gesperrt oder besonders gut durchgelassen werden.
Die folgende Aufgabe beschäftigt sich mit einem solchen Filter, der aus einer Reihenschaltung von Kondensator und ohmschem Widerstand besteht.

Material 1: Ein Lautsprecher wandelt elektrische Signale in Töne um. Dazu wird an seine Anschlüsse eine Wechselspannung angelegt. Unterschiedliche Tonhöhen resultieren aus den verschiedenen Frequenzen der angelegten Spannung. Für eine optimale Wiedergabe der unterschiedlichen Frequenzen müssen die einzelnen Lautsprecher unterschiedlich aufgebaut sein. In einer Zweiwege - Lautsprecherbox sind zwei unterschiedliche Lautsprecher eingebaut.



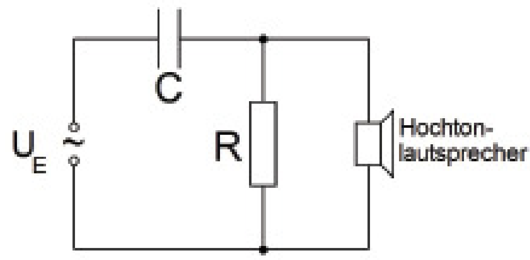
Material 2: Ein Kondensator hat einen frequenzabhängigen kapazitiven Widerstand und er bewirkt Phasenverschiebung

Material 3: In einem zusätzlichen Experiment wurde bei fester Wechselspannung $U_{eff} = 3V$ die Stromstärke I_{eff} als Funktion der Frequenz gemessen:

f in Hz	10	20	50	100	200	500
I_{eff} in A	0,019	0,038	0,094	0,188	0,375	1

Material 4: Der Hochpassfilter ist eine in Lautsprechern verwendete Filterschaltung. Bei Anlegen einer Wechselspannung als Eingangsspannung U_E stellt man fest, dass eine am Widerstand abgegriffene Teilspannung als Ausgangsspannung U_A von der Frequenz abhängig ist.

Material 5: Wichtig für die Qualität jeder Lautsprecherbox ist die Trennfrequenz $f_T = 1 / 2\pi \cdot R \cdot C$, ab der das Signal überwiegend an den Hochtöner geleitet wird. Häufig nimmt man $R = 10\,\Omega$ und fordert $f_T = 2{,}5\,kHz$



Aufgaben:

1 Erläutere das Verhalten eines Kondensators im Gleich- bzw. Wechselstromkreis. Erkläre, wie es beim Kondensator zur Phasenverschiebung von Stromstärke und Spannung kommt.

2 Stelle die Abhängigkeit des kapazitiven Widerstandes des untersuchten Kondensators von der Frequenz für die gegebenen Messwerte grafisch dar.
Begründe detailliert den Kurvenverlauf.
Berechne die Kapazität des verwendeten Kondensators.

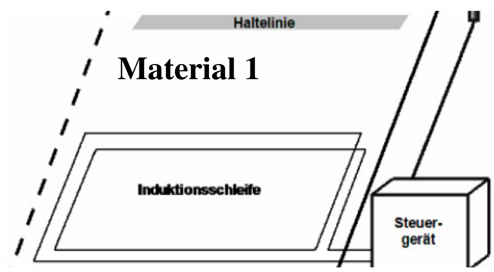
3 Erkläre die Wirkungsweise eines Hochpassfilters. Analysiere dazu das Verhältnis aus Eingangs- und Ausgangsspannung für hohe und tiefe Frequenzen.

4 Leite die Gleichung für die Trennfrequenz aus einem sinnvollen Ansatz für das Verhältnis von X_C und X_R her. Berechne die Kapazität des in der Schaltung benötigten Kondensators.

5 Begründen Sie einen möglichen Aufbau für eine Tiefpassschaltung

3) **<u>Ampelsteuerung (mit Schülerexperiment)</u>**

Zur Steuerung von Ampeln werden häufig Induktionsschleifen verwendet. Sie dienen zur Registrierung von Fahrzeugen im Ampelbereich. Induktionsschleifen sind Kupferdrahtpulen mit wenigen Windungen, die in die Fahrbahn eingelassen werden. Überquert ein metallisches Fahrzeug die Spule, so verändert sich ihre Induktivität. Es wird untersucht, wie Induktionsschleifen Fahrzeuge erkennen und diese unterscheiden.



Material 2: Meist enthält das Steuergerät einen Schwingkreis, zu dem die Induktionsschleife gehört. Die Spule in der Induktionsschleife hat eine Ausgangsinduktivität von $300\,\mu H$.
Die Kapazität des Kondensators im Schwingkreis beträgt $55\,nF$. Für die Eigenfrequenz gilt die Thomsonse Schwingungsformel $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}}$.

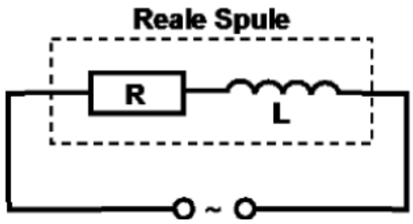
Material 3: Die Schleife wird von einem Wechselstrom durchflossen und umgibt sich so mit einem magnetischen Wechselfeld. In den Metallteilen eines über die Schleife fahrenden Fahrzeuges entstehen dadurch Wirbelströme. Diese wirken auf die Induktionsspule zurück und *mindern* im Effekt die Induktivität L der Spule. . Der Quotient $\Delta L / L$ wird ***Verstimmung*** der Induktionsschleife genannt. Die Änderung von L ändert die Eigenfrequenz des Schwingkreises. Die spezifische Frequenzänderung stellt einen „Fingerabdruck“ des Fahrzeuges dar:

Art des Fahrzeuges	Verstimmung $\Delta L / L$
PKW	-0,06
LKW	-0,017
Motorrad	-0,01
Fahrrad	-0,0002

Material 4: Regeln für das Verlegen von Induktionsschleifen:

(1)Induktionsschleife und Zuleitungen müssen fest eingebettet sein.
(2)Die Zuleitungen der Schleife müssen fest verdrillt werden.
(3)Zu beweglichen Metallteilen (Tore, Schranken, ..) muss ausreichenden
(4)Abstand herrschen. Zäune haben kaum Einfluss. An Ampeln und Schranken muss die Haltelinie für Fahrzeuge eine ausreichende Entfernung von der Induktionsschleife haben, damit die Schleife vollständig überfahren werden kann.

Material 5: Reale Spulen haben im Wechselstromkreis außer ihrem induktiven auch einen ohmschen Widerstand. Für den gesamten Wechselstromwiderstand Z (Scheinwiderstand = Impedanz) der Spule gilt dabei: $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$



<u>Aufgaben:</u>

1 Berechne die Eigenfrequenz f_0 des Schwingkreises. Beschreibe die Vorgänge in einem Schwingkreis (ohne Dämpfung) für eine halbe Periode. Beachte die Energieumwandlungen.

2 Berechne die Eigenfrequenz f_1, wenn einPKW die Induktionsschleife überquert.

3 Erkläre die unterschiedliche Verstimmung durch die verschiedene Fahrzeugarten.

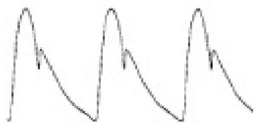
4 Begründe zwei Regeln, die beim Verlegen von Induktionsschleifen zu beachten sind.

<u>Schülerexperiment:</u> Bestimmen der Induktivität einer Spule

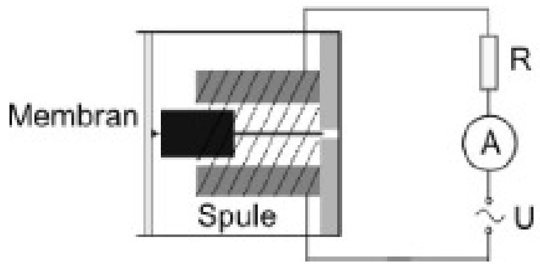
Die Induktivität der Induktionsschleife muss bekannt sein. Begründe, warum $L = \mu_0 \mu_r n^2 A / l$ hier nicht anwendbar ist. Die Induktivität muss daher experimentell ermittelt werden.
(1)Ermitteln zunächst den ohmschen Widerstand der Spule im Gleichstromkreis.
(2)Ermittele dann den Scheinwiderstand im Wechselstromkreis.
Das Experiment beinhaltet:
- Das Anfertigen eines Schaltplans und den Aufbau der Schaltung.
- Die Aufnahme von jeweils einem Messwertpaar für die zum Berechnen der Widerstände.
- Die erforderlichen Berechnungen. Das Nennen von zwei Ursachen für mögliche Messfehler.

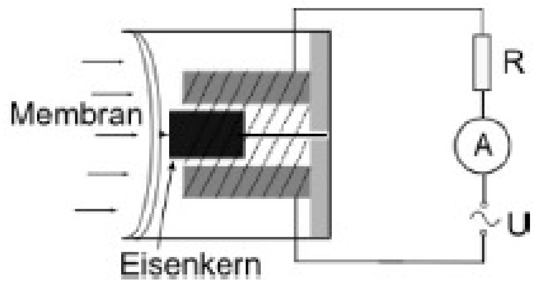
4) Blutdruckmessung (mit Schülerexperiment)

Bei Operationen wird der Blutdruck kontinuierrlich gemessen. Dafür werden z.B. induktive Drucksensoren eingesetzt. Die entsprechenden Signale werden zeitlich aufgelöst dargestellt. Die Funktionsweise eines induktiven Sensors wird in den folgenden Aufgaben untersucht.



Material 1: Induktiver Drucksensor: Eine Membran im Drucksensor wird in Abhängigkeit vom Blutdruck verformt und verändert dabei die Position eines kleinen Eisenkerns in einer Spule. Diese Positionsveränderung kann messtechnisch erfasst werden.

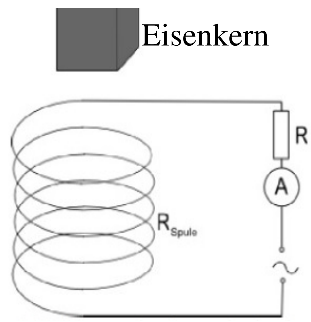




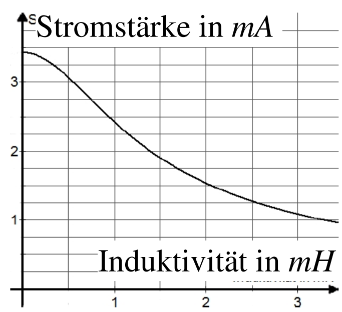
Material 2: Spule eines Drucksensors
Mobil einsetzbare Drucksensoren haben eine kleine Bauform. Die Induktivität L der Spule hat deshalb kleine Werte. Vereinfachend gehen wir von einer lange dünnen Spule aus. Für die Daten des Sensors werden folgende Annahmen gemacht: $n = 500\,Wdg$; $A = 25\,mm^2$; $l = 1{,}8\,cm$
Die Spule hat den ohmschen Widerstand $R_{Spule} = 35\,\Omega$. Der gesamte Stromkreis, bestehend aus Spule und Zuleitungen, hat den ohmschen Widerstand $R_{ges} = 135\,\Omega$.
Eine Überlegung zeigte, dass für die optimale Funktion $\boxed{R_{ges} = \sqrt{2} \cdot \omega \cdot L}$ gelten muss.

Material 3: Positionserkennung
Ein induktiver Drucksensor wird immer mit Wechselspannung betrieben. Ein Eisenkern kann in verschiedenen Positionen in die Spule eingebracht werden. Für jede Position kann die Stromstärke gemessen werden.

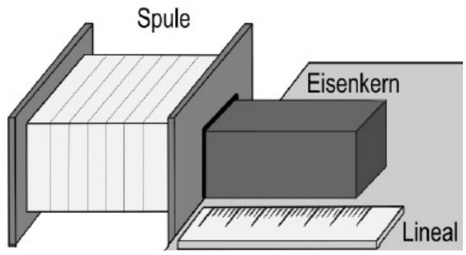
L –Wert der Spule mit Fe-Kern bei mittlerem Druck	$870\,\mu H$
Gesamtwiderstand des Sensorkreises R_{ges}	$135\,\Omega$
Effektivwert der Spannung	$12\,V$
Frequenz der Wechselspannung	$34\,Hz$



Material 4: Empfindlichkeit des Sensors
Ein Drucksensor ist empfindlich, wenn eine kleine Druckänderung eine große Stromstärkeänderung hervorruft. Die Abb. zeigt den Verlauf der Stromstärke bei konstanter Frequenz f in Abh. von L .



Material 5: Schülerexperiment
Die Spule wird an eine Wechselspannungsquelle angeschlossen und der Strom in der Spule wird gemessen. Zu Beginn der Messung soll sich der Eisenkern außerhalb der Spule befinden. Er wird dann von einer Seite stückweise in die Spule hinein geschoben.



Formeln:

$L = \mu_0\, \mu_r\, n^2 \cdot A / l$; $Z = \sqrt{R_{ges}^2 + \omega^2 L^2}$

Aufgaben:

1 Berechne gemäß Material 2 die Induktivität der luftgefüllten Spule. (Kontrolle: $L = 436\,\mu H$)
Erläutere, wie die Induktivität der Spule des induktiven Sensors vergrößert werden kann.

2 Begründe, warum der Sensor mit einer Wechselspannung betrieben werden muss.
Zeige, dass der Sensor bei der Netzfrequenz $f = 50\,Hz$ nicht optimal arbeitet.

3 Begründe für die Schaltung in Material 1, dass die Stromstärke von der Eindrucktiefe abhängt.
Berechne die Stromstärke für die im Material 3 angegebenen Daten.

4 Bestimmen Sie begründet einen Bereich der Induktivität L der Sensorspule, für den eine möglichst große Empfindlichkeit des Sensors erreicht wird.

5 **Schülerexperiment**
In einem Modellexperiment wird der induktive Drucksensor vereinfachend durch eine Spule und einen verschiebbaren Eisenkern realisiert (siehe Material 5).Untersuche die Abhängigkeit der Stromstärke in einer Spule von der Position eines Eisenkerns.
Bearbeiten Sie dazu folgende Aufträge:
(1) Zeichnen einen geeigneten Schaltplan und baue die Schaltung auf.
(2) Miss für sechs unterschiedliche Positionen des Eisenkerns die Stromstärke.
(3) Stelle die Stromstärke in Abhängigkeit von der Position des Eisenkerns in einem Diagramm grafisch dar.
(4) Erläutere den Verlauf der Kurve in dem Diagramm.

5) **Induktivität einer realen Spule**

a) Schätze die Induktivität der realen Spule aus den Abmessungen ab.
Verwende dazu die Formel für die Induktivität einer langen dünnen Luftspule.
b) Bestimme den Ohmschen Widerstand der Spule durch Messung.
c) Bestimme den Wechselstromwiderstand der Luftspule. Notiere die gewählte Frequenz *f*.
d) Sizziere das Zeigerdiagramm der realen Spule und leite daraus $Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ her.
e) Ermittele nun die Induktivität auf Grund der Messergebnisse.
f) Miss den Wechselstromwiderstand nun für die Spule mit Eisenkern und ermittele den *L*.
g) Bestimme die wirksame Permeabilität des Eisenskern und vergleiche mit Tabellenwerten.

6) **Siebkette**

a) Untersuche eine Reihenschaltung aus Spule, Widerstand und Kondensator.
b) Vorbetrachtung
- Vergleiche das Frequenzverhalten des induktiven Widerstandes der Spule mit dem Widerstandswert des ohmschen Widerstandes und dem kapazitiven Widerstand des Kondensators.
- Beurteile das Frequenzverhalten der Stromstärken in den Bauteile bei fester Spannung.

c) Stelle den Zeigerplan auf und zeige dass die Zeiger des Gesamtstromes und der Gesamtspannung $\vec{I} = x\left(1 \middle| 0\right)$ und $\vec{U} = x \cdot \left(R \middle| \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$ lauten.
d) Leite daraus die Impedanz $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - 1/\omega C\right)^2}$ der Siebkette her.
e) Die Resonanzfrequenz ergibt sich aus der Forderung $U_x\, I_y = U_y\, I_x$. Zeige, dass daraus $f_r = 1\,/\,2\pi\sqrt{L \cdot C}$ folgt. Ermittele f_r für eine Spule mit $n = 1000\ Wdg$ und **I-**Eisenkern, sowie eine Kondensator mit $C = 2\,\mu F$ und eine Widerstand mit $R = 100\,\Omega$.
f) Entwirf einen Schaltplan zur Impedanzmessung. Baue die Schaltung auf und führe die Messung mit den o.g. Bautreilen durch. Beachte dabei den Wert der Resonanzfrequenz f_r.

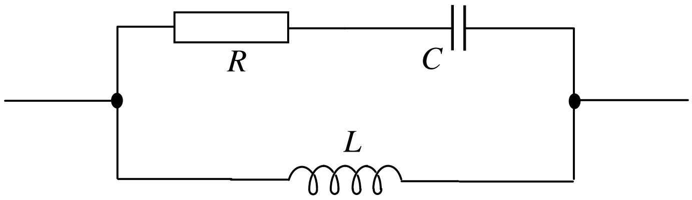
7) Sperrkreis
8) Schwingkreis

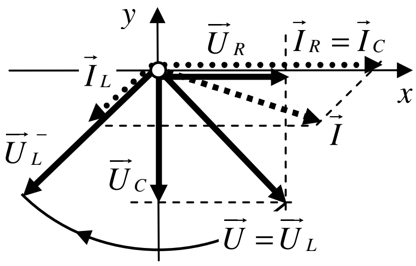
9) Die elektrische Zahnbürste (mit Schülerexperiment)
10) Schüttellampe (mit Schülerexperiment)
(mit Schülerexperiment) GK
11) Induktion (mit Schülerexperiment) GK
12) Metallsuchgerät (mit Schülerexperiment) GK
13) Ortungsgerät (mit Schülerexperiment) GK
14) Überspannung (mit Schülerexperiment) GK
15) Vorschaltgerät (mit Schülerexperiment) GK
16) Zangenstrommesser (mit Schülerexperiment) GK

D) ANHANG

Schaltung 3) R und C in Reihe, L parallel dazu. (Zu Übugszwecken)

Diese Schaltung dient auch als *Resonanzkreis*.





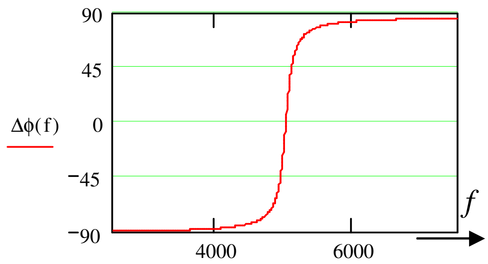
Hier stimmen $\vec{I}_R = \vec{I}_C$ überein. Beide Zeiger werden deshalb mit unbekannter Länge x auf die x-Achse gesetzt. Nun trägt man $\vec{U}_R$ und $\vec{U}_C$ an. Der Summenzeiger ist $\vec{U} = \vec{U}_L$, er muss die Länge $\hat{U}$ haben, wodurch sich x bestimmt. $\vec{U}_L$ wird nun um 90° zurück gedreht. Division durch ωL liefert $\vec{I}_L$. Addition von $\vec{I}_R$ ergibt den Gesamtstrom $\vec{I}$.

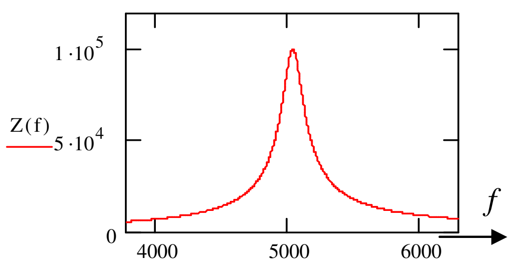
	Zeigerplan für Schaltung 3)			
	Strom		Spannung	Bemerkung
1	$\vec{I}_R = \left(x \middle| 0\right)$	3	$\vec{U}_R = \left(R\,x \middle| 0\right)$	$x = ?$
2	$\vec{I}_C = \left(x \middle| 0\right)$	4	$\vec{U}_C = \left(0 \middle| -\dfrac{x}{\omega C}\right)$	
		5	$\vec{U} = \vec{U}_L = x\left(R \middle| -\dfrac{1}{\omega C}\right)$	$\to x$
7	$\vec{I}_L = \dfrac{x}{\omega L}\left(-\dfrac{1}{\omega C} \middle| -R\right)$	6	$\vec{U}_L^{-90°} = x\left(-\dfrac{1}{\omega C} \middle| -R\right)$	
8	$\vec{I} = x\left(1-\dfrac{1}{\omega^2 LC} \middle| -\dfrac{R}{\omega L}\right)$			

Ergebnisse: $x = \hat{I}_R = \dfrac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}}$; $Z(\omega) = \dfrac{\sqrt{U_x^2 + U_y^2}}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} = \dfrac{\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{1}{\omega^2 LC}\right)^2 + \left(\dfrac{R}{\omega L}\right)^2}}$

$$\Delta\varphi(\omega) = \arctan\frac{U_x I_y - U_y I_x}{U_x I_x + U_y I_y} = \arctan\frac{R\cdot\left(-\dfrac{R}{\omega L}\right) - \left(-\dfrac{1}{\omega C}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{\omega^2 LC}\right)}{R\cdot\left(1-\dfrac{1}{\omega^2 LC}\right) + \left(-\dfrac{1}{\omega C}\right)\cdot\left(-\dfrac{R}{\omega L}\right)}$$

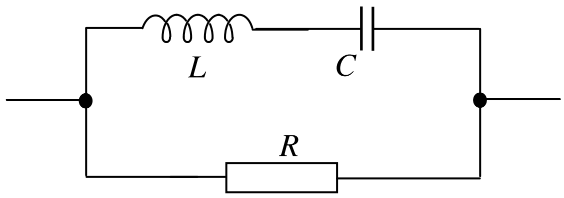
Die Resonanzfrequenz ergibt sich wieder aus $U_x\, I_y = U_y\, I_x$. Erg.: $\omega_r = \dfrac{1}{\sqrt{LC - R^2C^2}}$.

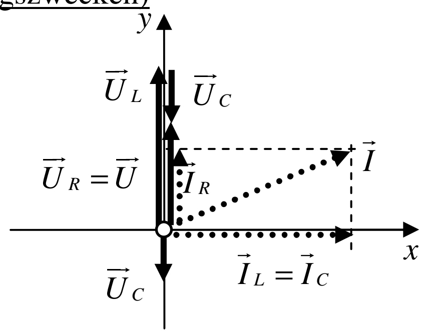




Schaltung mit $R = 100\,\Omega;\ C = 10\,nF;\ L = 0{,}1\,H$ ergibt $f_r = 5035\,Hz$

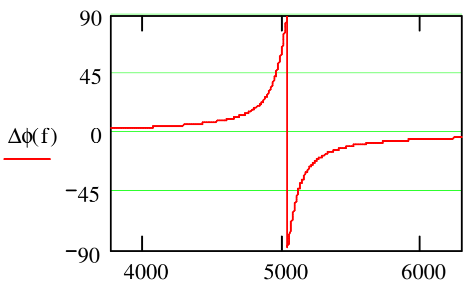
Schaltung 4) L , C in Reihe, R parallel dazu (Zu Übungszwecken)

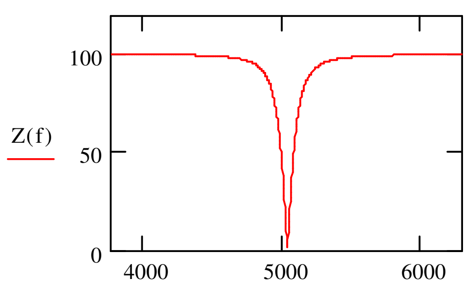




Der Strom $\vec{I}_L = \vec{I}_C$ durch L und C wird mit x angesetzt.
Daraus ergeben sich $\vec{U}_C$, $\vec{U}_L$, $\vec{U}_C + \vec{U}_L = \vec{U} = \vec{U}_R$ sowie x,
daraus wiederum $\vec{I}_R$ und damit $\vec{I} = \vec{I}_R + \vec{I}_C$.

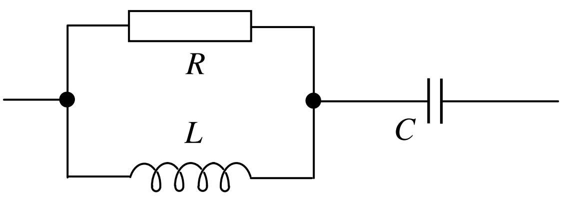
	Zeigerplan für Schaltung 4)			
	Strom		Spannung	Bemerkung
1	$\vec{I}_L = (x \mid 0)$	3	$\vec{U}_L = x(0 \mid \omega L)$	$x = ?$
2	$\vec{I}_C = (x \mid 0)$	4	$\vec{U}_C = \left(0 \,\middle|\, -\dfrac{x}{\omega C}\right)$	
6	$\vec{I}_R = \dfrac{x}{R} \cdot \left(0 \,\middle|\, \omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)$	5	$\vec{U} = \vec{U}_R = x\left(0 \,\middle|\, \omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)$	$\rightarrow x$
7	$\vec{I} = x\left(1 \,\middle|\, \dfrac{\omega L}{R} - \dfrac{1}{\omega CR}\right)$			

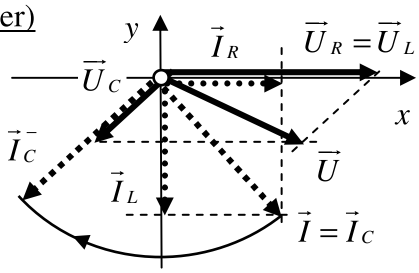




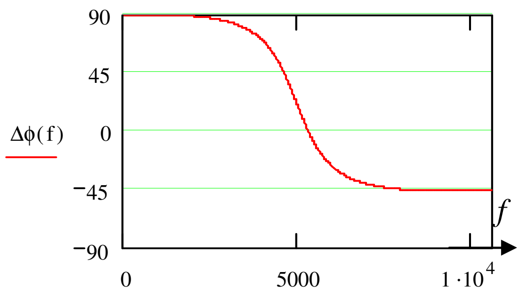
$R = 100\,\Omega;\ C = 10\,nF;\ L = 0{,}1\,H$ ergibt $f_r = 5027\,Hz$ Bei f $_r$ ein Phasensprung von - π

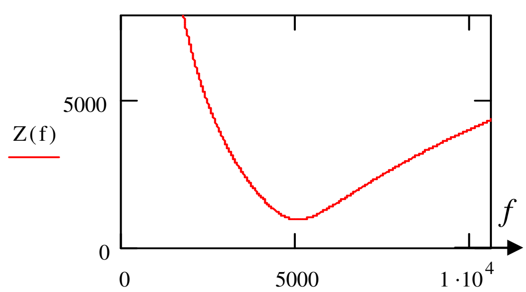
Schaltung 5) R , L parallel, C in Reihe dazu (Trainer)





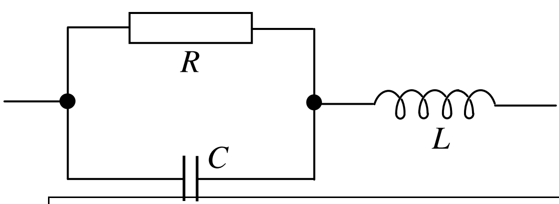
	Zeigerplan für Schaltung 5)			
	Strom		Spannung	Bem.
3	$\vec{I}_R = x\left(1/R \mid 0\right)$	1	$\vec{U}_R = \left(x \mid 0\right)$	$x = ?$
4	$\vec{I}_L = x\left(0 \,\middle|\, -\dfrac{1}{\omega L}\right)$	2	$\vec{U}_L = \left(x \mid 0\right)$	
5	$\vec{I} = \vec{I}_C = x\left(\dfrac{1}{R} \,\middle|\, -\dfrac{1}{\omega L}\right)$			
6	$\vec{I}_C^{\,-90°} = x\left(-\dfrac{1}{\omega L} \,\middle|\, -\dfrac{1}{R}\right)$	7	$\vec{U}_C = x \cdot \dfrac{1}{\omega C} \cdot \left(-\dfrac{1}{\omega L} \,\middle|\, -\dfrac{1}{R}\right)$	
		8	$\vec{U} = x\left(1 - \dfrac{1}{\omega^2 LC} \,\middle|\, -\dfrac{1}{\omega RC}\right)$	$\to x$

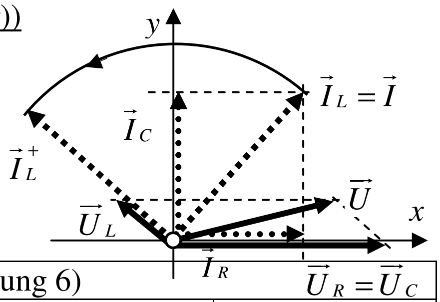




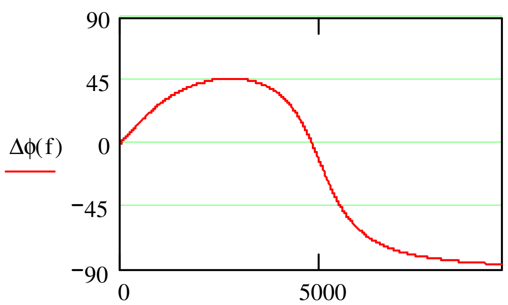
$R = 10k\,\Omega;\ C = 10nF;\ L = 0{,}1H$ ergibt $f_r = 5305\,Hz$

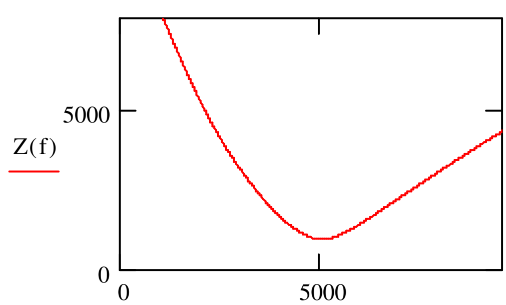
Schaltung 6) R, C parallel, L in Reihe dazu (Trainer))





	Zeigerplan für Schaltung 6)			
	Strom		Spannung	Bemerkung
3	$\vec{I}_R = x\left(1/R \mid 0\right)$	1	$\vec{U}_R = \left(x \mid 0\right)$	$x = ?$
4	$\vec{I}_C = x\left(0 \mid \omega C\right)$	2	$\vec{U}_C = \left(x \mid 0\right)$	
5	$\vec{I} = \vec{I}_L = x\left(1/R \mid \omega C\right)$			
6	$\vec{I}_L^{\,+90°} = x\left(-\omega C \mid 1/R\right)$	7	$\vec{U}_L = x\omega L\left(-\omega C \mid 1/R\right)$	
		8	$\vec{U} = x\left(1 - \omega^2 CL \mid \omega L / R\right)$	$\to x$

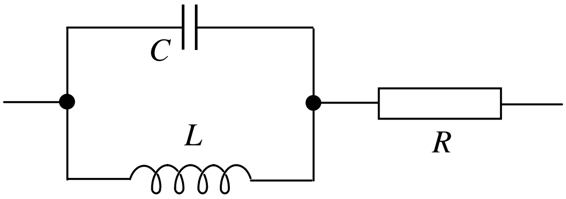


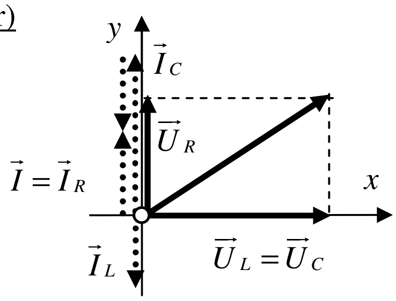


$R = 10k\,\Omega;\ C = 10nF;\ L = 0{,}1H$ ergibt $f_r = 4775\,Hz$

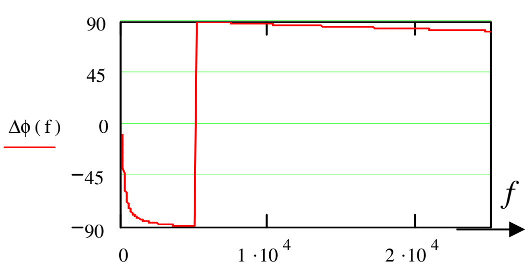
Schaltung 7) C, L parallel, R in Reihe dazu (Trainer)

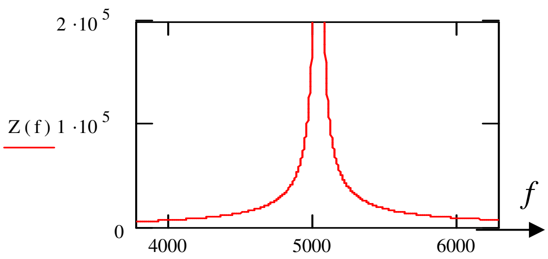
Diese Schaltung dient auch als *Resonanzkreis*.





	Zeigerplan für Schaltung 7)			
	Strom	1	Spannung	Bemerkung
3	$\vec{I}_C = x\left(0 \mid \omega C\right)$	2	$\vec{U}_C = \left(x \mid 0\right)$	$x = ?$
4	$\vec{I}_L = x\left(0 \middle\vert -\dfrac{1}{\omega L}\right)$	6	$\vec{U}_L = \left(x \mid 0\right)$	
5	$\vec{I} = \vec{I}_R = x \cdot \left(0 \middle\vert \omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)$	7	$\vec{U}_R = R \cdot x \left(0 \middle\vert \omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)$	
		8	$\vec{U} = x\left(1 \middle\vert \omega CR - \dfrac{R}{\omega L}\right)$	$\rightarrow x$

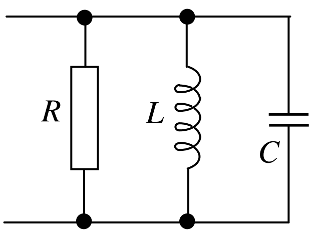


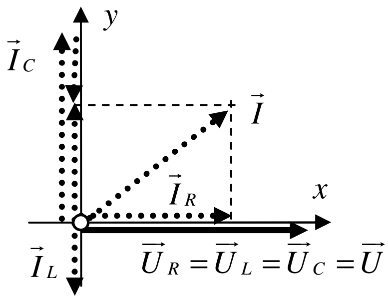


$R = 100\Omega$; $C = 10nF$; $L = 0{,}1H$ ergibt $f_r = 5033\,Hz$

Bei ω_r erfolgt ein Phasensprung von $+\pi$

Schaltung 8) R, C, L parallel (Trainer)





	Zeigerplan für Schaltung 8)			
	Strom		Spannung	Bemerkung
4	$\vec{I}_R = x\left(1/R \mid 0\right)$	1	$\vec{U} = \vec{U}_R = \left(x \mid 0\right)$	$x = \hat{U}$
5	$\vec{I}_L = x\left(0 \middle\vert -\dfrac{1}{\omega L}\right)$	2	$\vec{U} = \vec{U}_L = \left(x \mid 0\right)$	
6	$\vec{I}_C = x\left(0 \mid \omega C\right)$	3	$\vec{U} = \vec{U}_C = \left(x \mid 0\right)$	
7	$\vec{I} = x \cdot \left(\dfrac{1}{R} \middle\vert \omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)$			$\rightarrow x$